Rekursja 1

Materiały pomocnicze do wykładu

wykładowca: **dr Magdalena Kacprzak**

Definicje rekurencyjne

Sposoby definiowania ciągów

- za pomocą wzoru jawnego: $a_n=3^n-2$

- opisowo: niech t_n będzie wagą n-tej krawędzi w drodze

- rekurencyjnie

Rekurencyjna definicja ciągu

Mówimy, że ciąg jest zdefiniowany rekurencyjnie jeśli:

(P) Określony jest pewien skończony zbiór wyrazów ciągu, zazwyczaj kilka pierwszych lub pierwszy wyraz

(R) Pozostałe wyrazy ciągu są zdefiniowane za pomocą poprzednich wyrazów ciągu.

Wzór definiujący ciąg w taki sposób nazywamy

wzorem, równaniem lub zależnością rekurencyjną

Rekurencyjna definicja ciągu

Warunek (P) zawiera początek lub krok początkowy definicji.

Pozostałe wyrazy ciągu są określane kolejno za pomocą reguły (R).

Przykłady

Silnia

Ciąg silnia:

(P) $SILNIA(0)=1$

(R) $SILNIA(n+1)=(n+1)\cdot SILNIA(n)$ dla $n>0$

$s(0)=1$, $s(1)=1$,

$s(2)=s(1)\cdot 2=1\cdot 2$,

$s(3)=s(2)\cdot 3=1\cdot 2\cdot 3$,

$s(4)=s(3)\cdot 4=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$, itd.

Suma

Ciąg suma $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}$

(P) SUMA(0)=1

(R) SUMA(n+1)=SUMA(n)+1/(n+1)!

s(0)=1,

s(1)=s(0)+1/1!=1+1/1!,

s(2)=s(1)+1/2!=1+1/1!+1/2!,

s(3)=s(2)+1/3!= 1+1/1!+ 1/2!+1/3!, itd.

Wyznacznik macierzy

(P) $\det(A)=a_{11}$, gdy A jest macierzą stopnia 1.

(R) Wyznacznik macierzy stopnia $n \geq 2$ można obliczać, korzystając ze wzoru rekurencyjnego:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot \det[A]_{1j}$$

gdzie $\det[A]_{1j}$ jest wyznacznikiem macierzy powstałej przez wykreślenie pierwszego wiersza i *j*-tej kolumny, który można wyliczyć z tego samego wzoru.

Wieża Hanoi

Starohinduska legenda

W wielkiej świątyni Benares w Hanoi, pod kopułą, która zaznacza środek świata, znajduje się płytka z brązu, na której umocowane są trzy diamentowe igły, wysokie na łokieć i cienkie jak talia osy.
Na jednej z tych igieł, w momencie stworzenia świata, Bóg umieścił 64 krążki ze szczerego złota.
Największy z nich leży na płytce z brązu,
a pozostałe jeden na drugim, idąc malejąco od największego do najmniejszego.

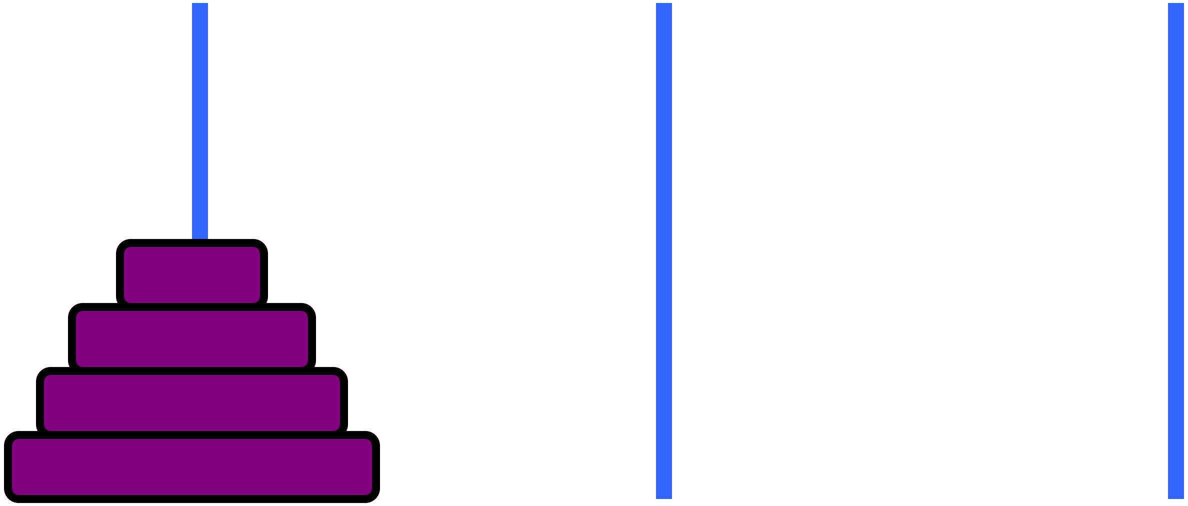
Starohinduska legenda

Bez przerwy we dnie i w nocy kapłani przekładają krążki z jednej diamentowej igły na drugą, przestrzegając niewzruszonych praw Brahma. Prawa te chcą, aby kapłan na służbie brał tylko jeden krążek na raz i aby umieszczał go na jednej z igieł w ten sposób, by nigdy nie znalazł się pod nim krążek mniejszy.

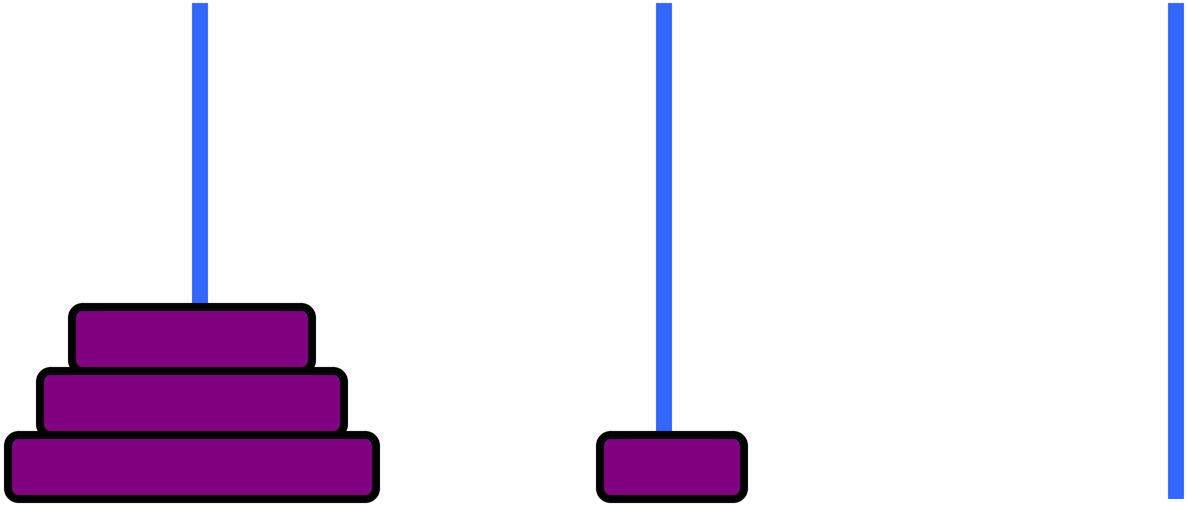
Starohinduska legenda

Wówczas, gdy 64 krążki zostaną przełożone z igły, na której umieścił je Bóg w momencie stworzenia świata, na jedną z dwóch pozostałych igieł, wieża, świątynia, bramini rozsypią się w proch i w jednym oka mgnieniu nastąpi koniec świata.

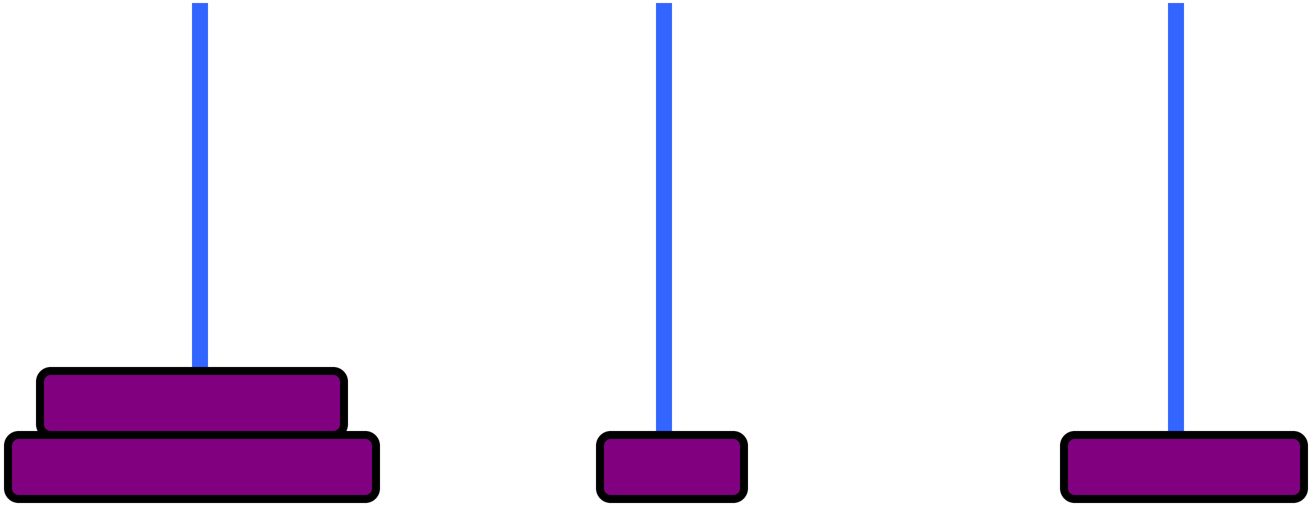
Rozwiązanie dla 4 krążków



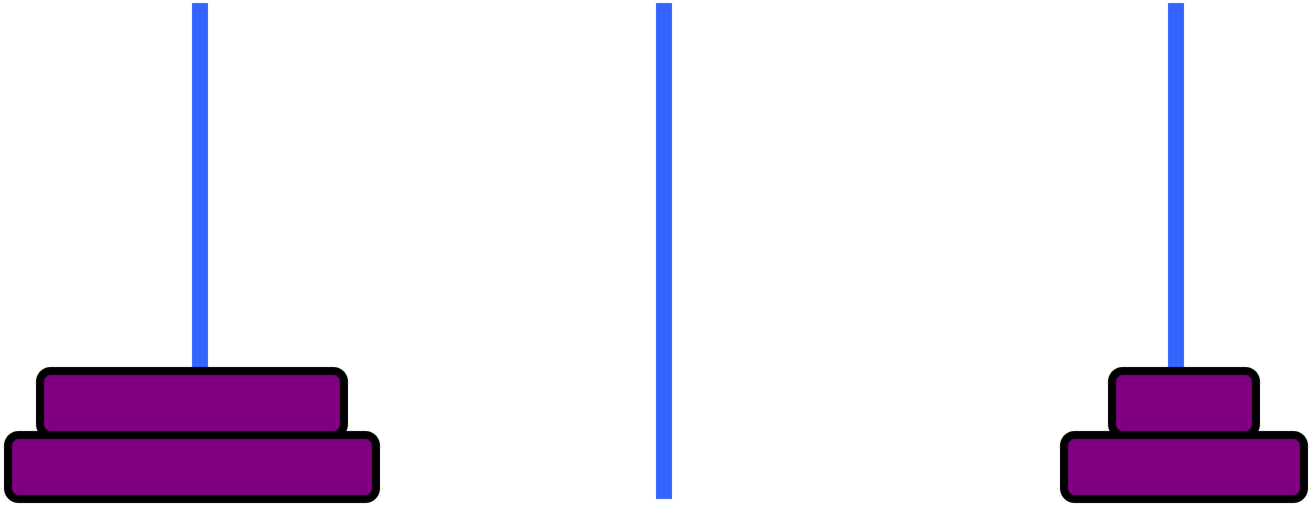
Rozwiązanie dla 4 krążków



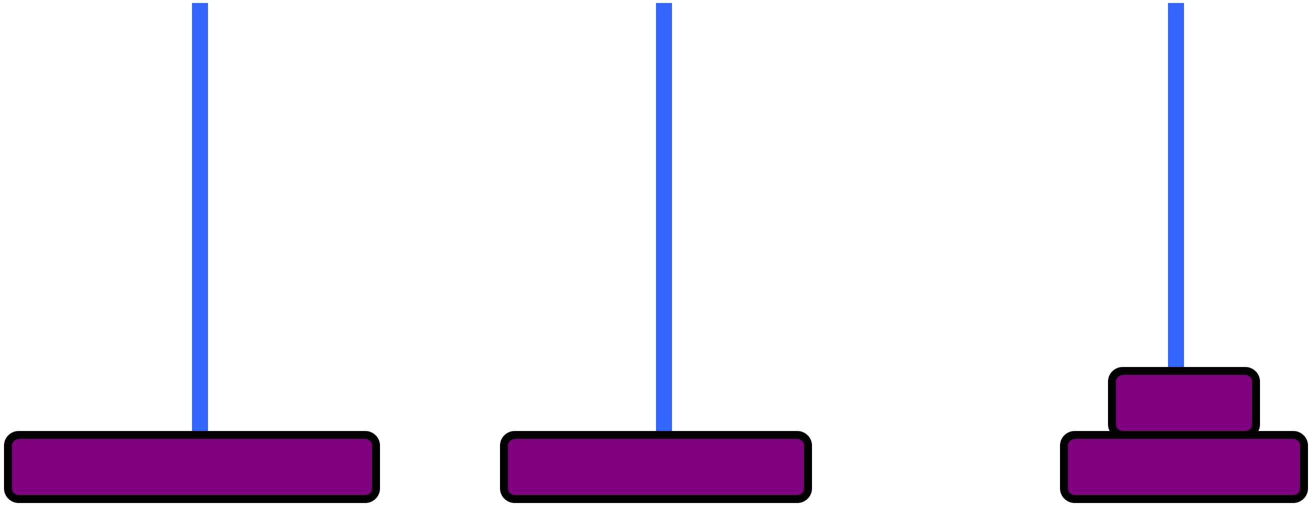
Rozwiązanie dla 4 krążków



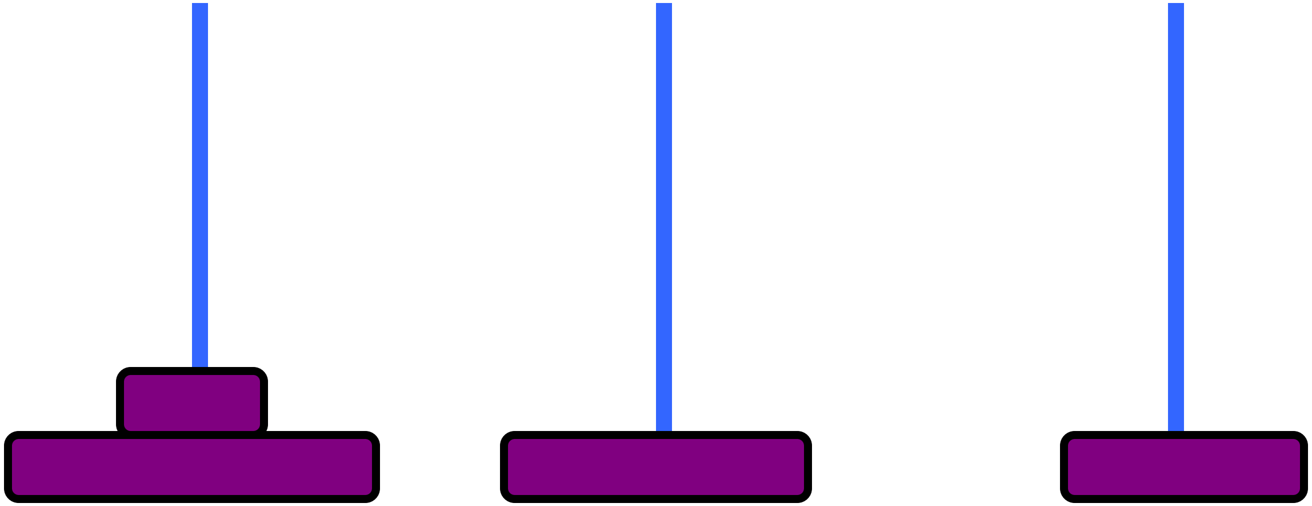
Rozwiązanie dla 4 krążków



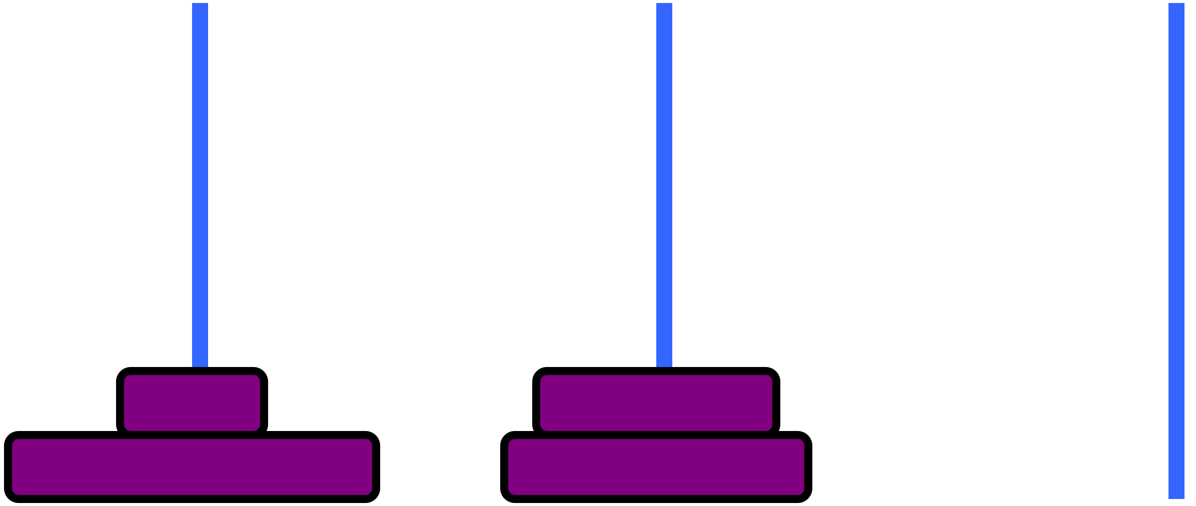
Rozwiązanie dla 4 krążków



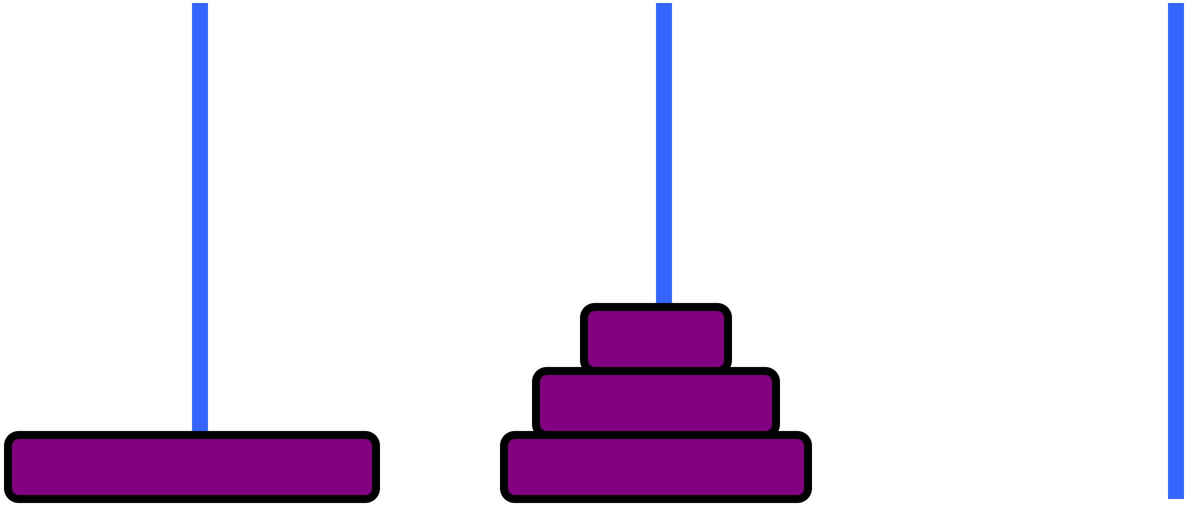
Rozwiązanie dla 4 krążków



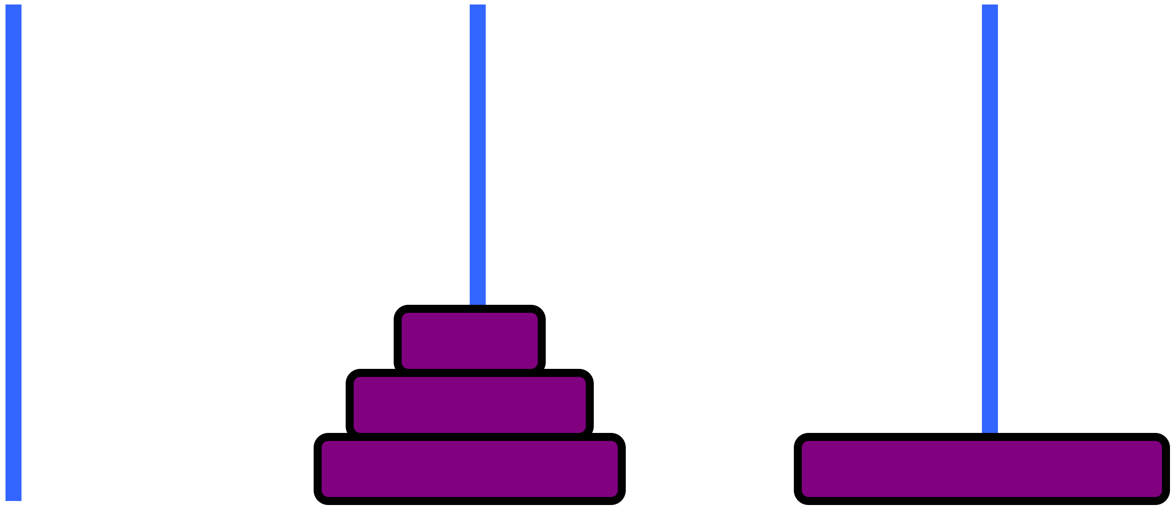
Rozwiązanie dla 4 krążków



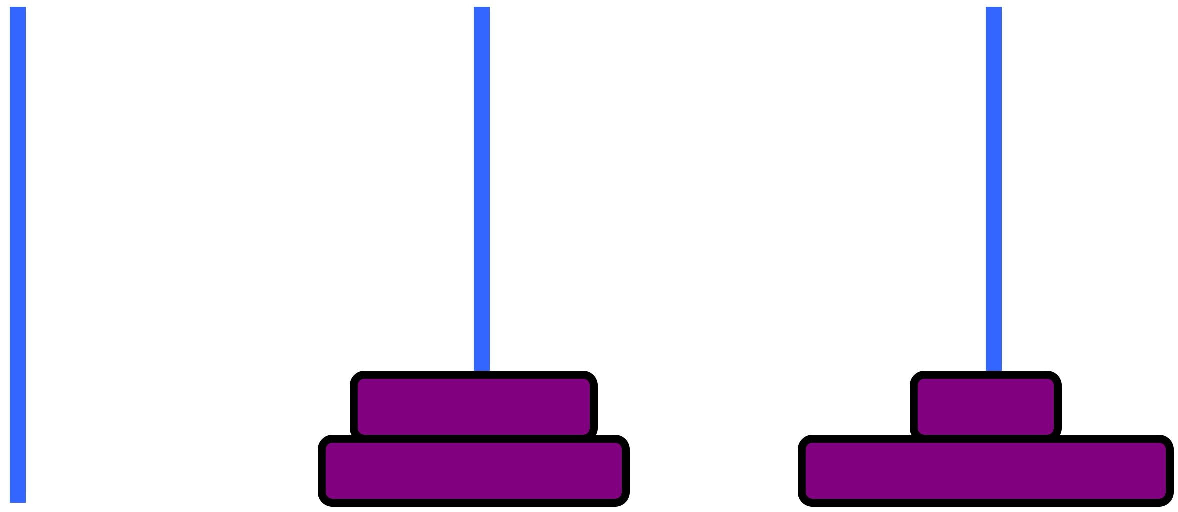
Rozwiązanie dla 4 krążków



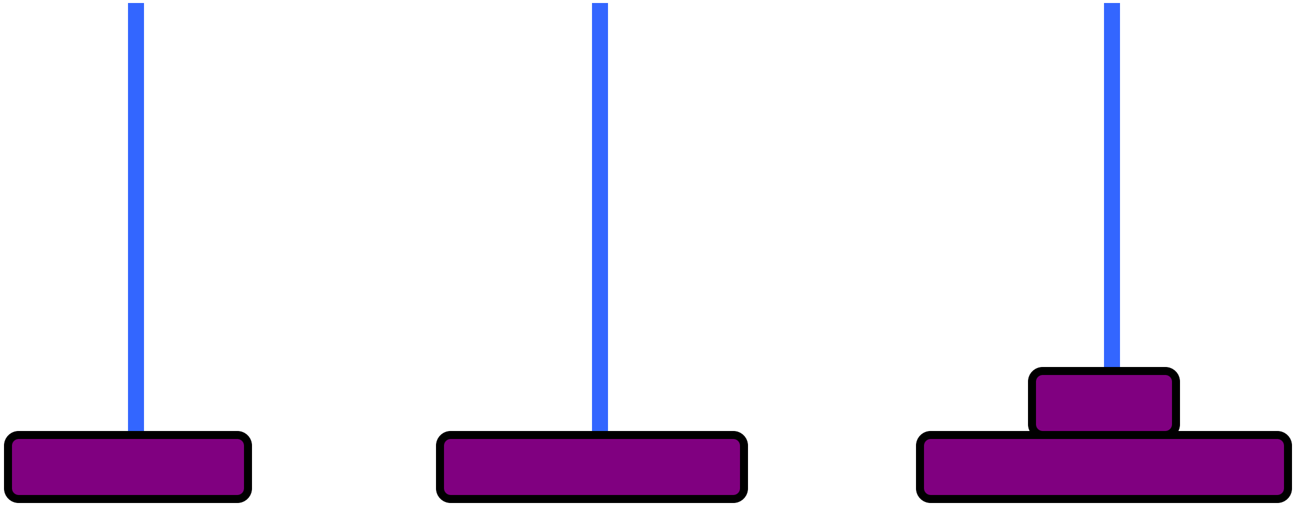
Rozwiązanie dla 4 krążków



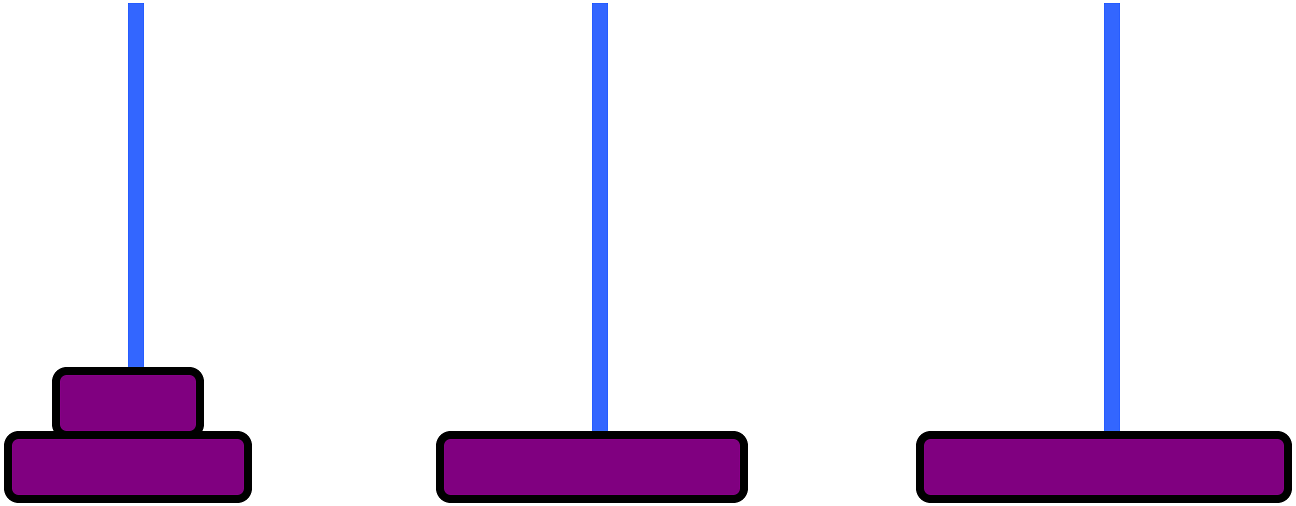
Rozwiązanie dla 4 krążków



Rozwiązanie dla 4 krążków

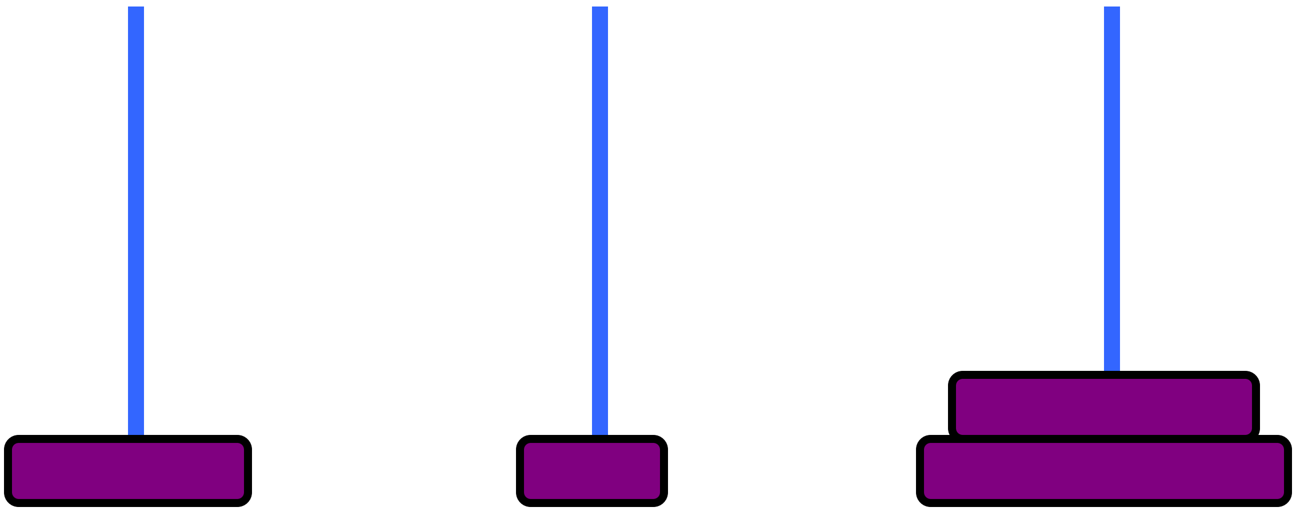


Rozwiązanie dla 4 krążków

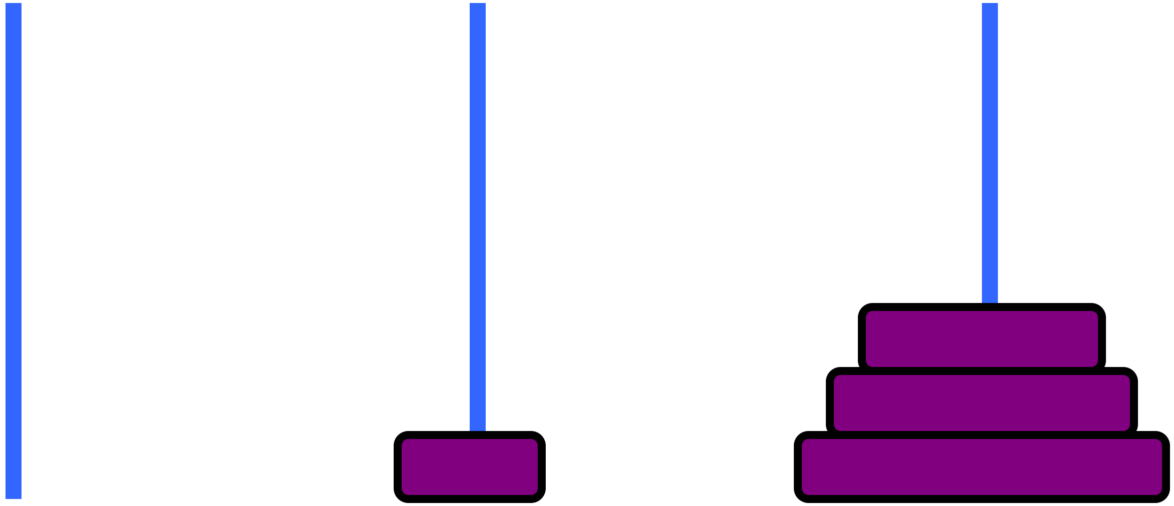


Rozwiązanie dla 4 krążków

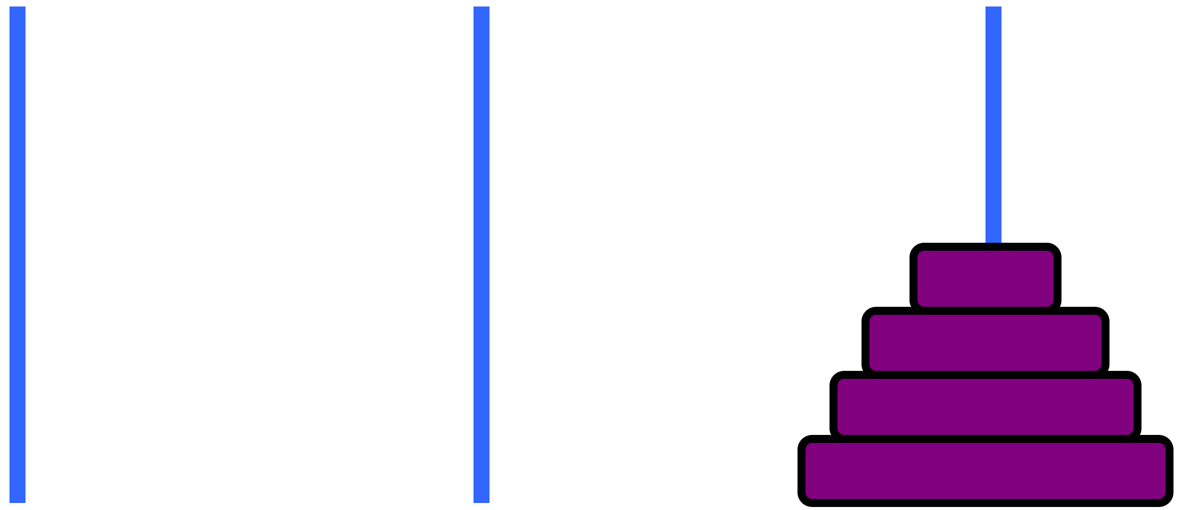
Rozwiązanie dla 4 krążków



Rozwiązanie dla 4 krążków



Rozwiązanie dla 4 krążków



Problem

Ile czasu zajmie kapłanom
przeniesienie wieży zakładając,
że jeden ruch trwa jedną sekundę?

Rozwiązanie

Załóżmy, że mamy **n krążków**.
Niech **a(n)** będzie szukaną minimalną liczbą ruchów.
Zauważmy, że aby przenieść największy krążek, należy najpierw przenieść wszystkie pozostałe **n-1** krążków i umieścić je na jednym paliku.

Rozwiązanie

Oznacza to, że musimy najpierw rozwiązać podproblem z parametrem o 1 mniejszym. Minimalna liczba ruchów na tym etapie wynosi więc a(n-1). Uwolniwszy największy krążek przenosimy go na wolne miejsce (1 ruch) i więcej go nie ruszamy, a pozostałe krążki ustawiamy ponownie na nim (kolejne a(n-1) ruchy).

Rozwiązanie

Otrzymujemy zatem następujące równanie rekurencyjne:

$$\mathbf{a(n)=2a(n-1)+1}$$

Z warunkiem początkowym $\mathbf{a(1)=1}$.

Rozwiązanie

Obliczmy kilka początkowych wyrazów tego ciągu:

$a(1)=1$

$a(2)=2\cdot 1+1=3$

$a(3)=2\cdot 3+1=7$

$a(4)=2\cdot 7+1=15$

Zauważmy, że

$\mathbf{a(n)=2^n-1}$

Rozwiązanie

Zależność tę dowodzimy **indukcyjnie**:

Krok bazowy: $a(1)=2^1-1=1$

Założenie indukcyjne: $a(k)=2^k-1$

Teza indukcyjna: $a(k+1)=2^{k+1}-1$

Rozwiązanie

Dowód indukcyjny:

$$a(k+1)=$$

$$2a(k)+1=$$

(korzystamy z założenia indukcyjnego)

$$2(2^k-1)+1=$$

$$2^{k+1}-2+1=$$

$$2^{k+1}-1$$

Rozwiązanie

Oznacza to, że dla n=64 koniec świata nastąpiłby po

$$\mathbf{2^{64}-1}$$

ruchach (około 18 trylionów). Zatem zakładając, że jeden ruch trwa tylko jedną sekundę, przełożenie wieży Brahmy zajęłoby kapłanom ponad $\mathbf{5 \cdot 10^9}$ (5 miliardów) wieków.

Ciąg i liczby Fibonacciego

Leonardo Fibonacci z Pizy

Włoski matematyk urodzony ok. 1180 r., zmarł ok. 1250 r.

Leonardo Fibonacci

Ojciec Leonardo Fibonacciego, pizański kupiec, był gubernatorem włoskiej kolonii w północno-afrykańskim porcie Boużia. Tam Leonardo pobierał pierwsze lekcje matematyki u arabskiego nauczyciela.

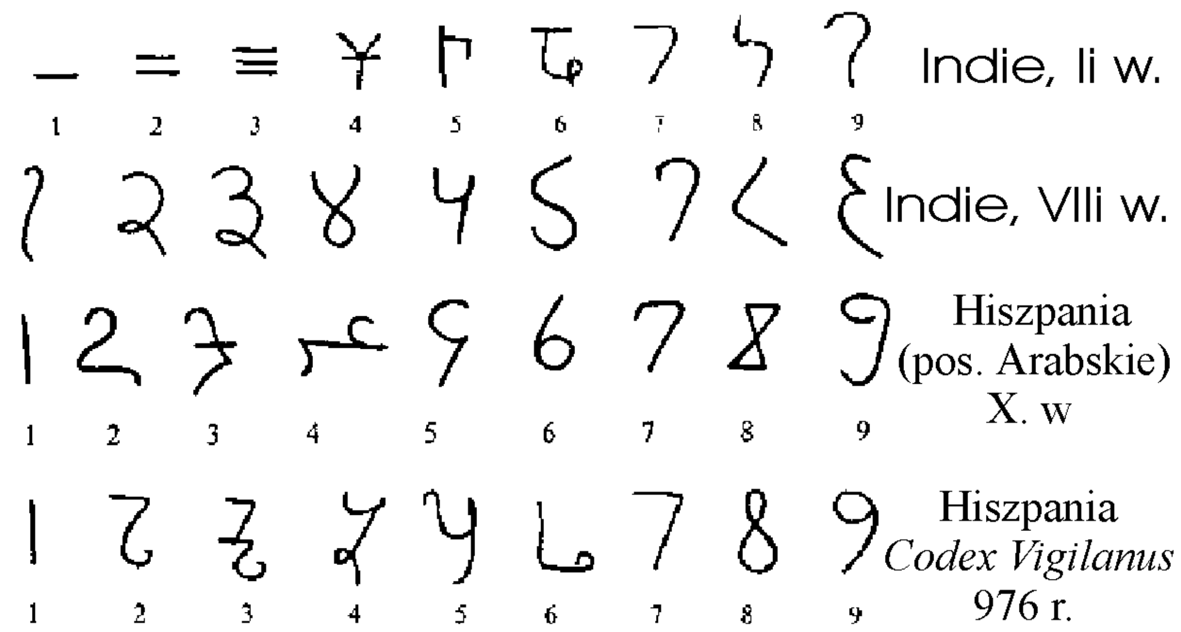
Leonardo Fibonacci

Po powrocie do Pizy,
w 1202 roku, napisał swoje
głośne dzieło Liber Abaci
(Księga Rachunków),
w której pojawiają się
arabskie a raczej
hinduskie cyfry.

Leonardo Fibonacci

Ten dla nas tak dzisiaj naturalny system, wędrował do Europy za pośrednictwem Arabów dobre parę setek lat.
Słynny wynalazek hinduski - zero, pojawiło się około IV-V wieku po Chrystusie, początkowo w formie kropki. Wraz z jego pojawieniem rozpoczął się dziesiętny system pozycyjny.

Cyfry hinduskie i arabskie z II,VIII i X wieku.



Króliczki Fibonacciego

L. Fibonacci, w swojej książce Liber Abaci zajął się problemem dotyczącym szybkości rozmnażania się stada królików. Przebiega ono według następujących zasad. Na początku mamy F nowo narodzonych królików i o każdej parze królików zakładamy, że:

- -nowa para staje się płodna po miesiącu życia;
- -każda płodna para rodzi jedną parę nowych królików w miesiącu;
- -króliki nigdy nie umierają

Króliczki Fibonacciego

Pytanie Fibonacciego brzmiało:
ile będzie par królików po upływie roku?
Częściej pyta się, ile będzie par królików po upływie k miesięcy - oznaczamy tę liczbę przez F(k) i nazywamy

liczbą Fibonacciego.

Liczby Fibonacciego

Miesiąc	Pary dorosłe	Pary młode	Całkowita liczba par
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144
13	144	89	233
14	233	144	377

Liczby Fibonacciego

Zauważmy, że

$$F(0)=0, F(1)=1$$

$$F(n)=F(n-1)+F(n-2) \text{ dla } n>1$$

Postać jawna ciągu Fibonacciego

$$F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}$$

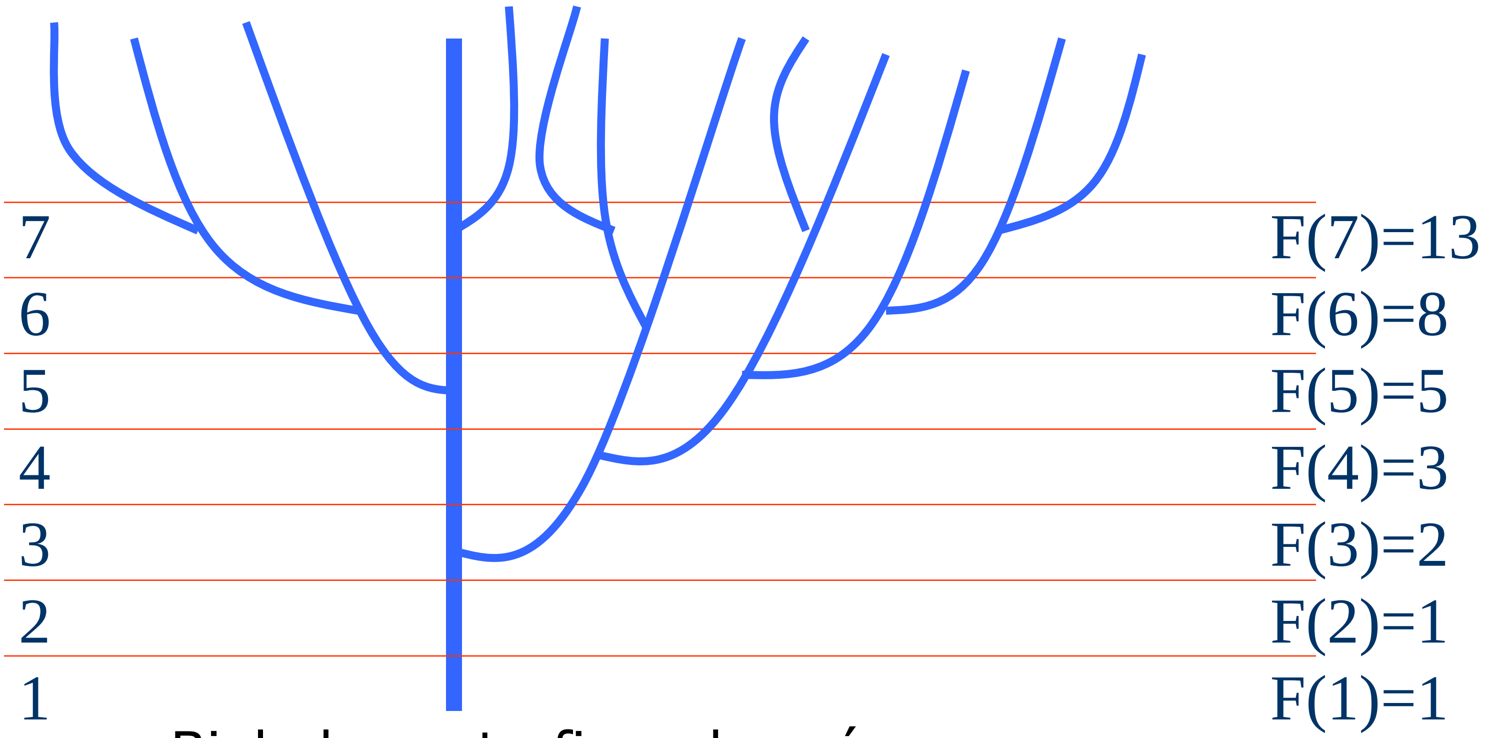
Drzewo Fibonacciego

Załóżmy, że rozrastanie się drzewa odbywa się zgodnie z zasadą:

> każdy pęd, wypuściwszy pęd boczny, przez rok odpoczywa i dopiero w następnym roku puszcza nowy pęd.

Jaka będzie liczba pędów w n-tym roku życia rośliny?

Drzewo Fibonacciego



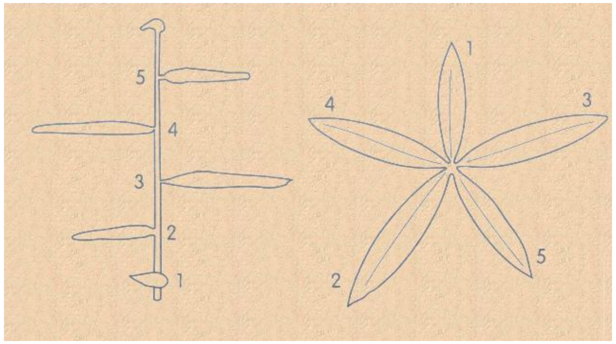
Biolodzy potrafią wskazać
drzewa, które tak właśnie się rozrastają.

Liczby Fibonacciego w naturze

Płatki kwiatów

Liczba płatków wielu kwiatów, w tym popularnej stokrotki, jest na ogół liczbą Fibonacciego i wynosi
3, lub 5, lub 8, lub 13 ...

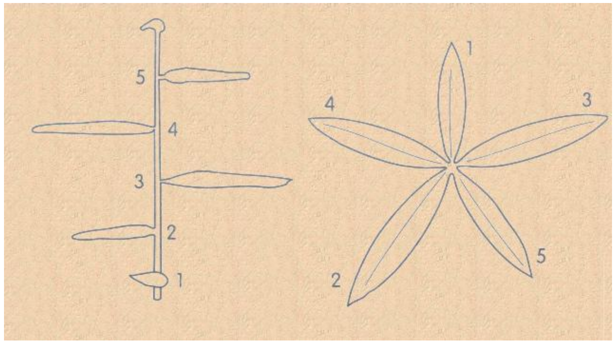
Liczby Fibonacciego w naturze



Liście na gałązkach i gałązki na łodygach.

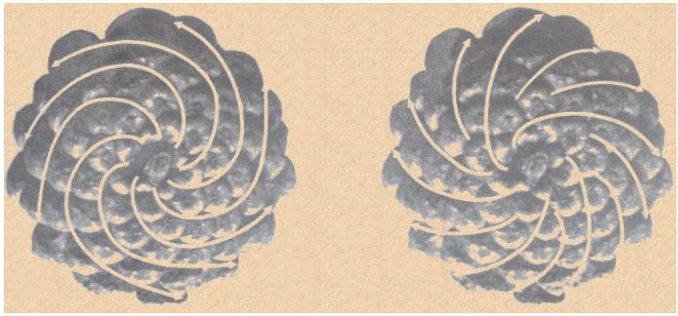
Zadziwiający wynik dają obserwacje rozkładu liści na gałązkach i gałązek na łodydze dębu. Od razu zauważamy, że nie wszystkie liście leżą jeden nad drugim, podobnie gałązki. Przeciwnie, zamiast wzdłuż linii prostej, układają się one wzdłuż spirali, która okrąża łodygę. Krzywa ta nazywa się helisą. Cyklem tej krzywej nazywa się odległość liści osadzonych dokładnie jeden nad drugim, wzdłuż gałęzi lub łodygi.

Liczby Fibonacciego w naturze



Helisę danej rośliny można scharakteryzować dwiema liczbami: liczbą obrotów cyklu helisy wokół gałązki lub łodygi oraz liczbą odstępów między kolejnymi liśćmi leżącymi nad sobą. Okazuje się, że dla bardzo wielu roślin te dwie liczby są liczbami Fibonacciego. Na przykład, drzewo bukowe ma cykl złożony z trzech liści i wykonuje on jeden obrót, a wierzba amerykańska *pussy willow* ma cykl złożony z 13 liści i wykonuje on 5 obrotów.

Liczby Fibonacciego w naturze



Szyszki i słoneczniki

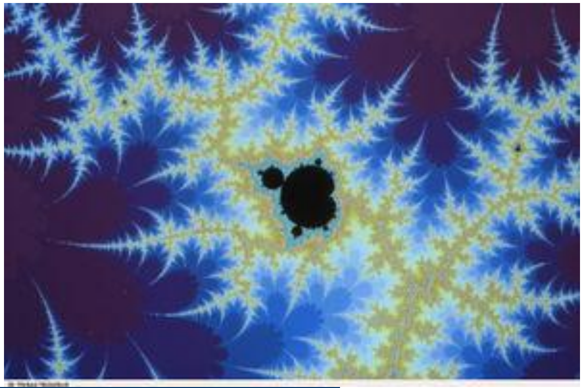
Najbardziej znanymi przykładami występowania liczb Fibonacciego w naturze są układy łusek na szyszkach i układy pestek w tarczach słoneczników. Na powyższym rysunku jest pokazana szyszka, na której widać spirale tworzone przez jej łuski. Spirale te są prawoskrętne i lewoskrętne (w przypadku tej szyszki jest 8 - lewoskrętnych i 13 – prawoskrętnych).

Liczby Fibonacciego w naturze

Z wyjątkiem kilku procent "odszczepieńców", łuski na większości szyszek układają się wzdłuż spiral, których liczby są ściśle związane z kolejnymi liczbami Fibonacciego. Podobnie, jak łuski na szyszkach, układają się pestki w tarczy słonecznika - również wzdłuż spiral, których liczba jest związana z liczbami Fibonacciego.

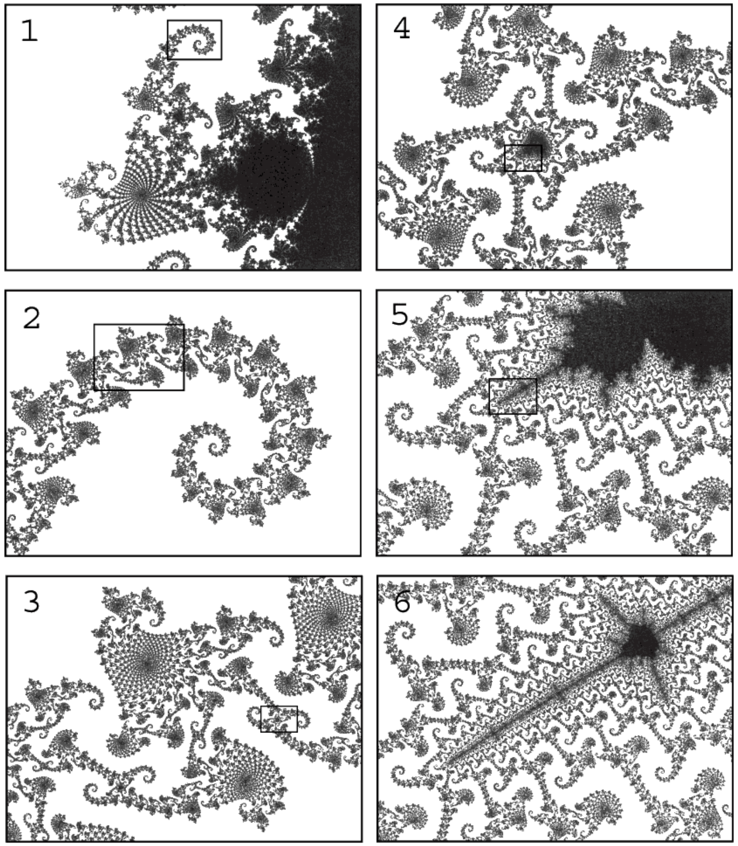
Fraktale

Pojęcie fraktala



Fraktal (łac. *fractus* – złamany, cząstkowy) w znaczeniu potocznym oznacza zwykle obiekt samo-podobny (tzn. taki, którego części są podobne do całości) albo "nieskończenie subtelny" (ukazujący subtelne detale nawet w wielokrotnym powiększeniu).

Zbiór Mandelbrota



Paprotka Barnsleya

Przykład procedury matematycznej generującej fraktale. Bierzemy punkt na płaszczyźnie o współrzędnych x=0 i y=0 i poddajemy go działaniu jednej z czterech poniższych operacji

$x_{n+1} = 0$
$y_{n+1} = 0,16y_n$

$x_{n+1} = -0,15x_n + 0,28y_n$
$y_{n+1} = 0,26x_n + 0,24y_n + 0,44$

$x_{n+1} = 0,2x_n – 0,26y_n$
$y_{n+1} = 0,23x_n + 0,22y_n + 1,6$

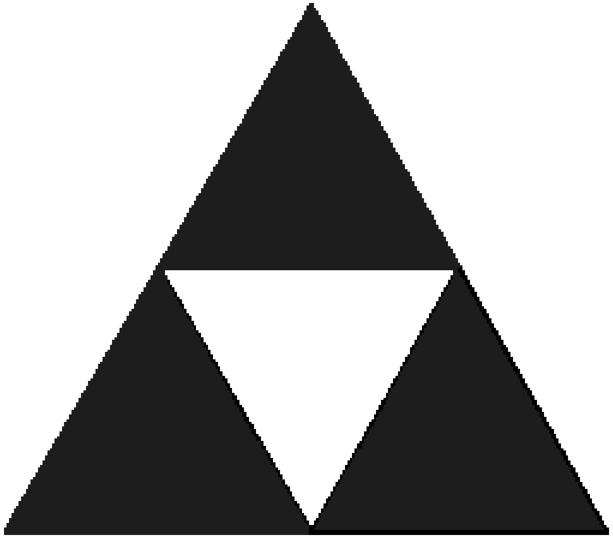
$x_{n+1} = 0,85x_n + 0,04y_n$
$y_{n+1} = -0,04x_n + 0,85y_n + 0,16$

Paprotka Barnsleya

Liczby x=0 i y=0 wstawiamy do prawej strony którejś z wypisanych par równań w miejsce x_n, y_n. Uzyskany wynik x_1, y_1 znowu wstawiamy do prawej strony, uzyskując współrzędne kolejnego punktu x_2, y_2 i czynność tę powtarzamy w nieskończoność. Z tych czterech par równań do kolejnego kroku iteracji wybieramy daną parę przypadkowo, ale zachowując zasadę, że pierwszą parę należy użyć raz na 100 iteracji, drugą i trzecią 7 razy na 100, czwartą 85 razy na 100. Uzyskane punkty nanosimy na płaszczyznę uzyskując fraktal, który nosi nazwę paprotki Barnsleya.

Trójkąt Sierpińskiego

Najpierw rysujemy trójkąt równoboczny o długości boku np. 1. Środki boków trójkąta łączymy odcinkami. Otrzymaliśmy cztery trójkąty równoboczne, każdy o długości boku 1/2. Usuwamy środkowy trójkąt.



Trójkąt Sierpińskiego

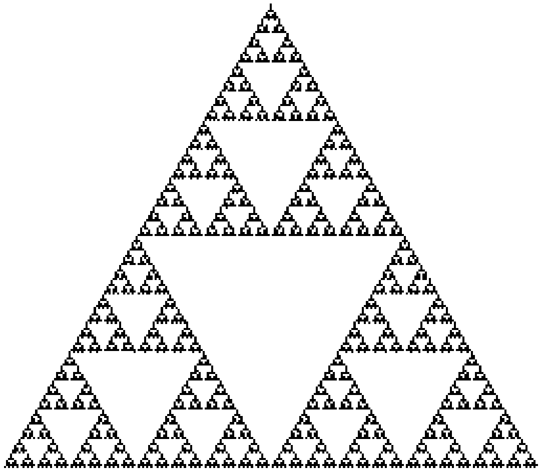
Każdy z pozostałych trzech mniejszych trójkątów dzielimy znowu na cztery równe trójkąty. Ich wierzchołkami są środki boków trójkątów otrzymanych w pierwszym kroku. Usuwamy środkowe trójkąty.

Trójkąt Sierpińskiego

W kolejnych krokach postępujemy podobnie jak poprzednio.
Po k krokach trójkąt będzie miał aż

$$z(k)=z(k-1)+3^{k-1}$$

dziur, którymi są usunięte trójkąty różnej wielkości. Rysunek poniżej pokazuje trójkąt po 5 krokach konstrukcji.



Zbiór, który otrzymamy po nieskończenie wielu krokach nazywa się **dywanem Sierpińskiego**

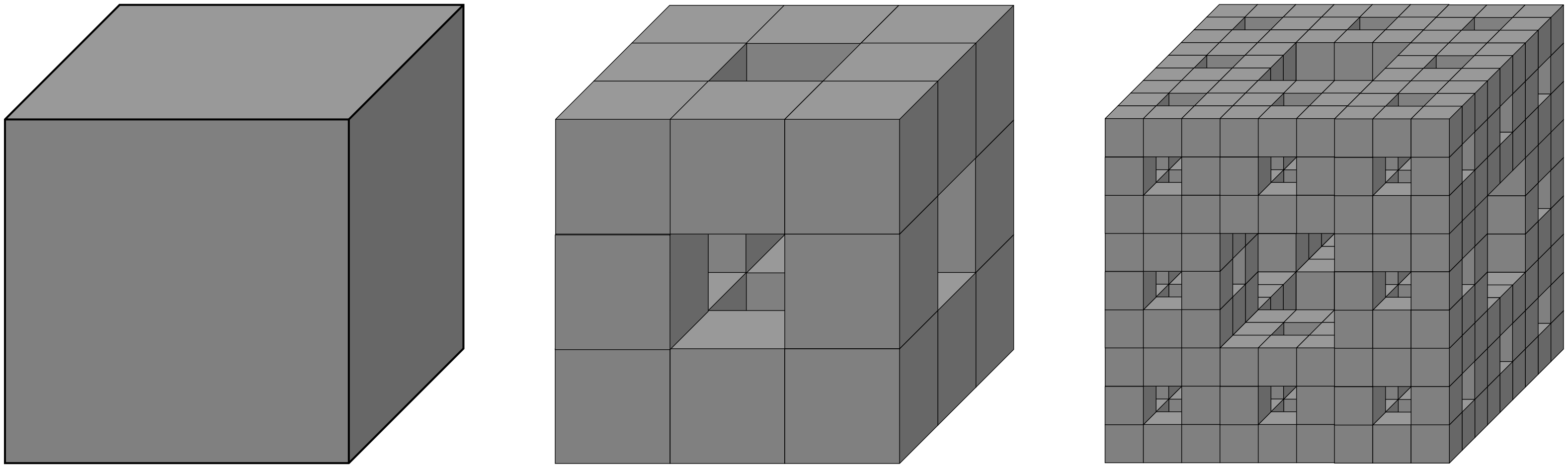
Kostka Mengera

Kostka Mengera powstaje w następujący sposób:

1. Dany jest sześcian
2. Tniemy go na 27 sześcianów równej wielkości płaszczyznami równoległymi do ścian
3. Usuwamy wszystkie sześciany przyległe do środków ścian pierwotnego sześcianu oraz sześcian znajdujący się w jego środku
4. Do każdego z 20 pozostałych sześcianów stosujemy poprzednią procedurę

Po nieskończonej liczbie powtórzeń opisanych operacji otrzymujemy kostkę Mengera.

Kostka Mengera



Kostka Mengera

Definicja rekurencyjna:

$M := \bigcap_{n \in N} M(n)$

$M(n+1) := \{(x,y,z) \in R^3 : (3x-i, 3y-j, 3z-k) \in M(n)$ i co najwyżej jedna z liczb i, j, k jest równa 1$\}$

Definicja rekurencyjna fraktali

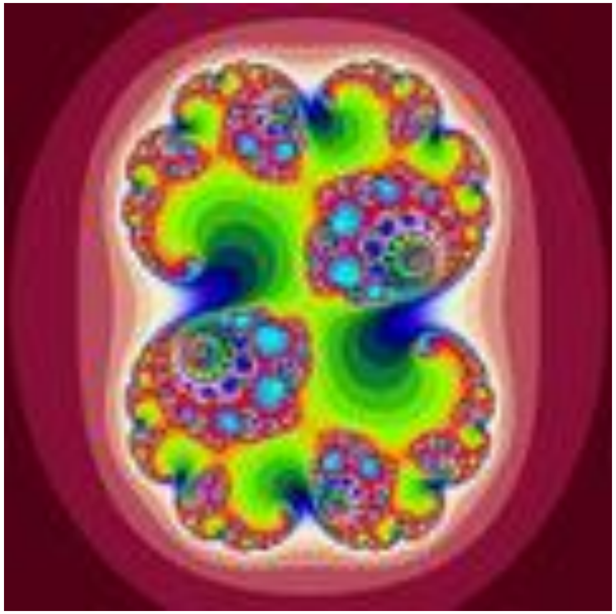
Zbiory takie jak zbiór Mandelbrota, zbiór Julii czy „płonący statek” są podzbiorami płaszczyzny zespolonej. Dla każdego punktu p określa się pewien ciąg $z_n(p)$. Od zbieżności tego ciągu zależy czy punkt należy do zbioru (fraktala). Ciąg określa się wzorem rekurencyjnym:

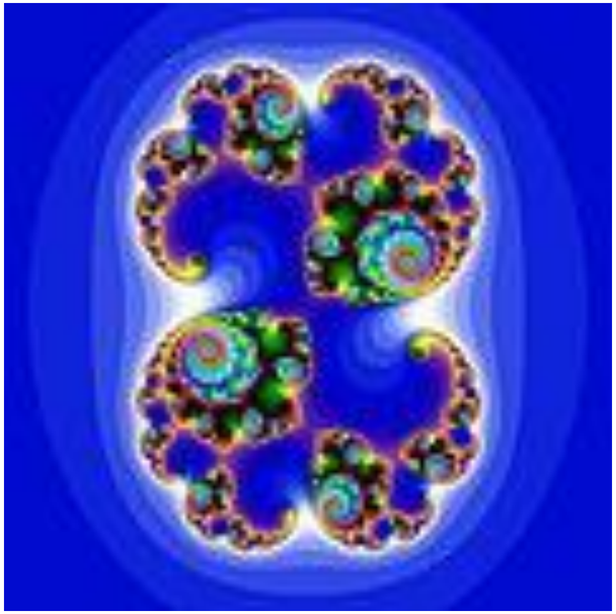
$$z(0)(p) = f(p)$$
$$z(n+1)(p) = g(z(n))$$

Od postaci funkcji f i g zależy rodzaj fraktala.

Zbiór Julii (Gaston Maurice Julia)

$$f(p)=p, \qquad z(n+1)=z^2(n)+C$$

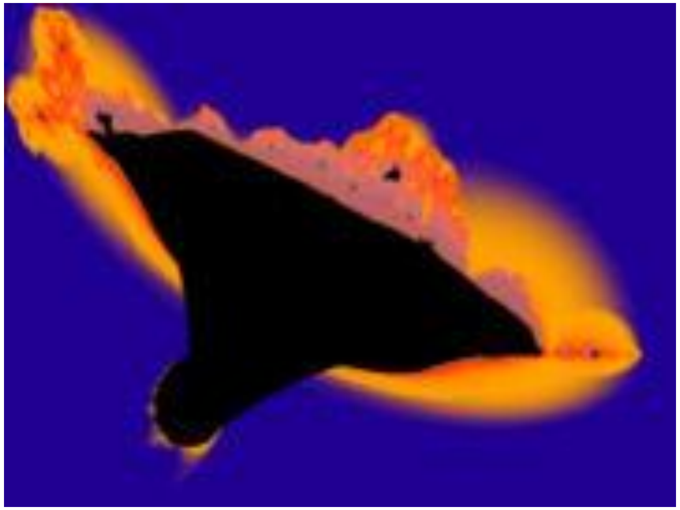




Płonący statek

Płonący statek to fraktal po raz pierwszy opisany przez Michaela Michelitscha i Otto E. Rösslera w 1992. Tworzą go punkty *c* płaszczyzny zespolonej, dla których ciąg opisany jest wzorem rekurencyjnym:

$z(n)=0$
$z(n+1)=$
$(|Re\{z(n)\}|+i|Im\{z(n)\}|)^2+C$



Algorytmy rekurencyjne

Pojęcie algorytmu rekurencyjnego

Algorytmy, które wywołują same siebie nazywamy algorytmami rekurencyjnymi

Wyszukiwanie binarne w ciągu uporządkowanym

Dany jest ciąg liczb naturalnych

$$a(1), a(2), \ldots, a(n)$$

taki, że dla każdego $1 \leq i < n$ zachodzi $a(i) < a(i+1)$.

Problem: Dana jest liczba x.
Wiedząc, że istnieje i takie, że $a(i)=x$, wyznacz i.

Rozwiązanie standardowe:
przeglądamy elementy ciągu sekwencyjnie, koszt pesymistyczny (mierzony np. liczbą porównań) jest rzędu n.

Wyszukiwanie binarne w ciągu uporządkowanym

Algorytm rekurencyjny: WB(l,p,x)
Niech l=1, p=n, wtedy

a) wyznaczamy k=(l+p) div 2,
b) jeśli a(k)=x, to algorytm kończy działanie,
c) jeśli a(k)<x, to przechodzimy rekurencyjnie do punktu a) dla l=k+1, p=n, WB(k+1,n,x)
d) jeśli a(k)>x, przechodzimy rekurencyjnie do punktu a) dla l=1, p=k-1. WB(1,k-1,x)

Koszt pesymistyczny algorytmu jest rzędu lg(n).

Wyszukiwanie binarne w ciągu uporządkowanym

Przykład:

ciąg a(n): 2,3,10,12,15,20,23,25 x=23

krok	l	p	k=(l+p) div 2	a(k)
0	l	8	4	12
1	5	8	6	20
2	7	8	7	23

Zliczanie liczby liści w drzewie binarnym

Zależność rekurencyjna:

liczba liści w drzewie binarnym o korzeniu w wierzchołku t jest równa sumie liczby liści w kolejno lewym i prawym poddrzewie wierzchołka t.

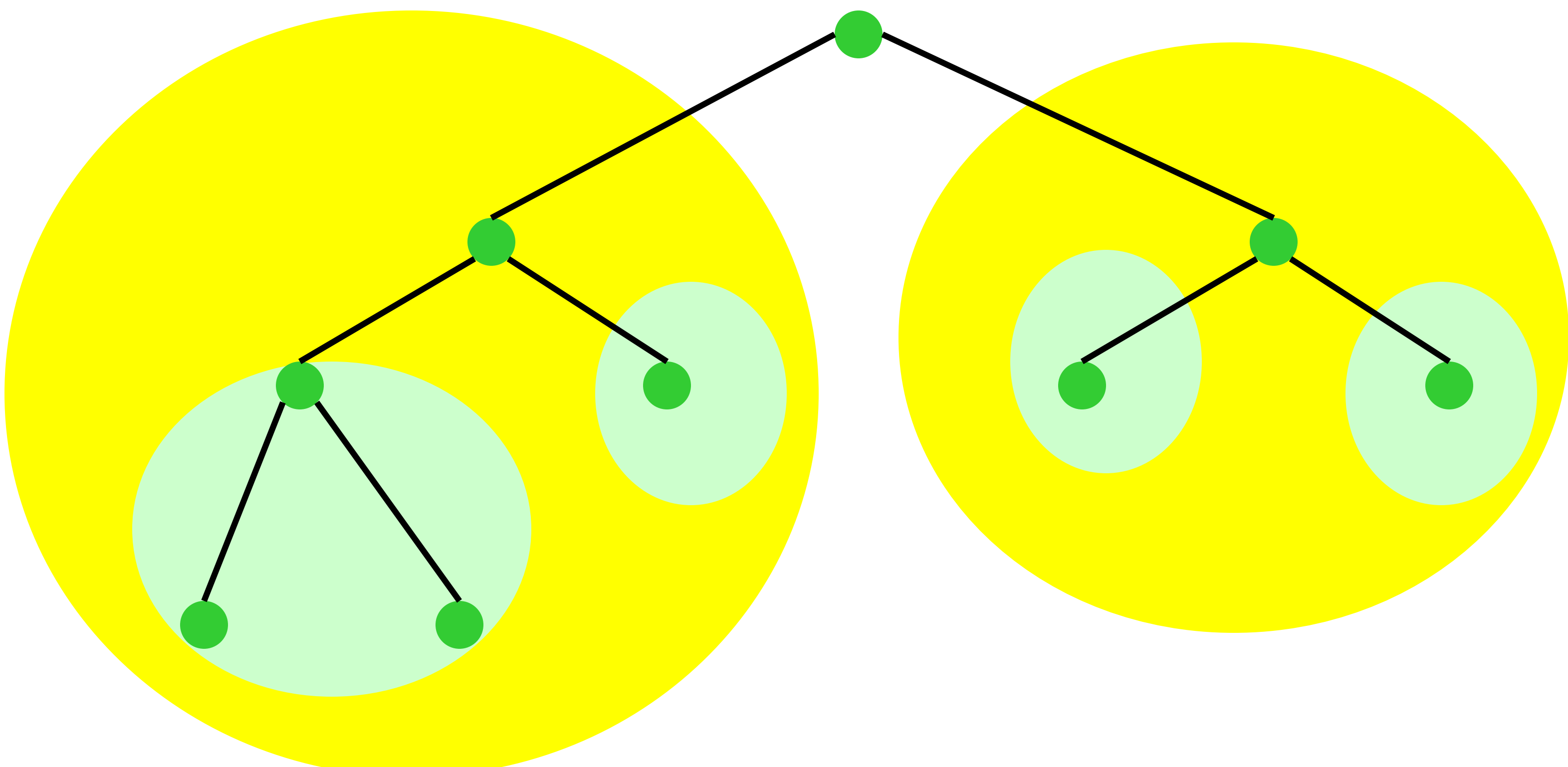
Jeżeli t jest liściem to liczba liści jest równa jeden.

Zliczanie liczby liści w drzewie binarnym

Algorytm rekurencyjny: zakładamy, że drzewo jest niepuste

```
SUMA_LIŚCI(wierzchołek t)
{zmienne:  suma_lewe_poddrzewo=0, suma_prawe_poddrzewo=0;

jeśli (wierzchołek t nie ma ani lewego ani prawego syna)

      zwróć 1;

jeśli (wierzchołek t ma lewego syna)
      suma_lewe_poddrzewo =SUMA_LIŚCI(lewy syn wierzchołka t);

jeśli (wierzchołek t ma prawego syna)
      suma_prawe_poddrzewo =SUMA_LIŚCI(prawy syn wierzchołka t);

      zwróć suma_lewe_poddrzewo + suma_prawe_poddrzewo;}
```

Zliczanie liczby liści w drzewie binarnym



Metody otrzymywania wzorów jawnych na wyrazy ciągów rekurencyjnych

Równania jednorodne

Najprostszym przykładem równania rekurencyjnego jednorodnego jest równanie postaci

$$\mathbf{s(n)=a \cdot s(n-1)+b \cdot s(n-2)}$$

gdzie dane są a i b. Załóżmy, że ma ono rozwiązanie postaci

$$\mathbf{s(n)=r^n} \, .$$

Podstawiając otrzymujemy:

$$r^n=a \cdot r^{n-1}+b \cdot r^{n-2}.$$

Równania jednorodne

$$r^n = a \cdot r^{n-1} + b \cdot r^{n-2}$$

Dzieląc przez r^{n-2} otrzymujemy

$$r^2 = a \cdot r + b$$

czyli

$$r^2 - a \cdot r - b = 0$$

równanie to nazywamy

równaniem charakterystycznym

równania rekurencyjnego.

Równania jednorodne

(a) Jeśli równanie charakterystyczne ma 2 różne rozwiązania r_1 i r_2, to

$$\mathbf{s(n)=c_1 \cdot (r_1)^n+c_2 \cdot (r_2)^n}$$

dla pewnych stałych c_1 i c_2. Jeśli s(0) i s(1) są dane, to wartości stałych mogą być wyznaczone przez podstawienie n=0 i n=1 i rozwiązanie układu dwóch równań z niewiadomymi c_1 i c_2.

Równania jednorodne

(b) Jeśli równanie charakterystyczne ma tylko jedno rozwiązanie r, to

$$s(n)=c_1 \cdot r^n + c_2 \cdot n \cdot r^n$$

dla pewnych stałych c_1 i c_2. Tak jak w punkcie (a), można wyznaczyć c_1 i c_2, jeśli dane są s(0) i s(1).

Przykład 1

Rozważmy zależność rekurencyjną
$s(0)=s(1)=3; s(n)=s(n-1)+2s(n-2)$ dla $n>1$

Równanie charakterystyczne

$$x^{2=}x+2$$

$$x^2-x-2=0$$

ma rozwiązanie $r_1=2$, $r_2=-1$.

Przykład 1

Wówczas

$$s(n)=c_1 2^n+c_2(-1)^n.$$

Podstawiając $n=0$ i $n=1$ otrzymujemy

$$s(0)=c_1 2^0+c_2(-1)^0$$

oraz

$$s(1)=c_1 2^1+c_2(-1)^1$$

czyli

$$3=c_1+c_2 \text{ oraz } 3=2c_1-c_2.$$

Przykład 1

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy

$$c_1=2 \text{ i } c_2=1.$$

Ostatecznie mamy

$$s(n)=$$
$$2\cdot 2^n+1\cdot(-1)^n=$$
$$2^{n+1}+(-1)^n.$$

Przykład 2

Rozważmy zależność rekurencyjną
$s(0)=1$, $s(1)=-3$; $s(n)=6s(n-1)-9s(n-2)$ dla $n>1$

Równanie charakterystyczne

$$x^{2=}6x-9$$

$$x^2-6x+9=0$$

ma jedno rozwiązanie $r=3$.

Przykład 2

Wówczas

$$s(n)=c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot n \cdot 3^n.$$

Podstawiając n=0 i n=1 otrzymujemy

$$s(0)=c_1 3^0+0$$

oraz

$$s(1)=c_1 3^1+c_2 3^1$$

czyli

$$1=c_1 \text{ oraz } -3=3c_1+3c_2.$$

Przykład 2

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy

$$c_1=1 \text{ i } c_2=-2.$$

Ostatecznie mamy

$$s(n)=3^n-2\cdot n\cdot 3^n.$$

Wyznaczanie zależności rekurencyjnych

- zadania

Zadanie 1

Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie? Odpowiedź podaj w formie równania rekurencyjnego.

Zadanie 1

Niech

a(n) - liczba różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni

Zadanie 1

Zauważmy, że

$a(1) = 1$, $a(2) = 2$

$a(n) =$

Zadanie 1

Zauważmy, że

$a(1) = 1$, $a(2) = 2$

$a(n) = a(n-1)\cdot 1 + a(n-2)\cdot 1$

(wchodzimy na n-1 stopień i pokonujemy 1 stopień lub wchodzimy na n-2 stopień i pokonujemy 2 stopnie naraz)

Zadanie 2

Na ile sposobów możemy ułożyć wieżę wysokości n cm z klocków, jeżeli mamy do dyspozycji klocki białe o wysokości 1 cm oraz klocki czarne, czerwone, niebieskie, żółte, zielone i różowe o wysokości 2 cm?

Zadanie 2

Niech

a(n) – liczba sposobów, na które możemy
ułożyć wieżę wysokości n

Zadanie 2

Zauważmy, że

$a(1) = 1$, $a(2) = 1+1 \cdot 6=7$

$a(n) =$

Zadanie 2

Zauważmy, że

$a(1) = 1$, $a(2) = 1+1\cdot 6=7$

$a(n) = a(n-1)\cdot 1 + a(n-2)\cdot 6$

(układamy wieżę wysokości n-1 i dokładamy biały klocek lub układamy wieżę wysokości n-2 i dokładamy jeden z sześciu klocków: czarny, czerwony, niebieski, żółty, zielony lub różowy)