Indukcja

1. Udowodnić, że

   (a) $2^n > n$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$,

   (b) $\sum_{i=1,\ldots,n}(i^2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

   (c) $\sum_{i=1,\ldots,n}(i^3) = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = (1+2+3+\ldots+n)^2$,

   (d) $\sum_{i=0,\ldots,n}(a_i) = a_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$, gdzie $a_{i+1} = q \cdot a_i$.

2. Niech $F(n)$ oznacza n-ty wyraz ciągu Fibonacciego zdefiniowanego rekurencyjnie następująco: $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ dla $n > 1$. Udowodnić, że

   (a) dla każdego $n > 0$, $F(3n)$ jest liczbą parzystą,

   (b) dla każdego $n > 0$, $F(4n)$ jest podzielne przez 3,

   (c) dla każdego $n > 0$, $F(n)^2 + F(n-1)^2 = F(2n-1)$,

   (d) dla każdego $n > 4$, $5|F(5n)$.

3. Udowodnić, że dla dowolnego $n > 0$,

   (a) $133|(11^{n+1} + 12^{2n-1})$,

   (b) $7|(8^n - 1)$,

   (c) $8|(5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1)$.

4. Udowodnij, że $(1+p)^n \geqslant 1 + np$, dla n naturalnego i p rzeczywistego i $p \geqslant (-1)$.

5. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 0$ i dowolnych dodatnich wartości a i b zachodzi wzór $(a+b)^n \geqslant a^n + b^n$.

6. Udowodnij, że każda liczba naturalna $n \geqslant 2$ jest liczbą pierwszą albo jest iloczynem liczb pierwszych.

7. Udowodnij przez indukcję względem $n \in \mathbb{N}$, że $Alg(n) = 2^n$, gdzie

$$Alg(n) = \{if \;\; n = 0 \;\; then \;\; return \;\; 1 \;\; else \;\; return \;\; Alg(n-1) \;\; + Alg(n-1)\}$$

8. Udowodnij przez indukcję względem $n \in \mathbb{N}$, że $Alg(n) = F(n)$, gdzie $F(n)$ jest n-tą liczbą Fibonacciego oraz

   $Alg(n) = \{if \;\; n = 0 \;\; then$

   $\quad return \;\; 0$

   $else$

   $\quad if \;\; n = 1 \;\; then \;\; return \;\; 1 \;\; else \;\; return \;\; Alg(n-1) \;\; + Alg(n-2) \;\; fi$

   $fi\}$

9. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dany jest algorytm:

$$Alg(n) = \{m := n; \;\; k := 0; \;\; while \;\; m \; mod \; 2 = 0 \;\; do \;\; m := \frac{1}{2}m; \;\; k := k+1 \;\; od\}.$$

   Udowodnij, że $m \cdot 2^k = n$ jest niezmiennikiem pętli w tym algorytmie.

10. Niech m, n będą liczbami naturalnymi takimi, że $m \leqslant n$. Rozważmy algorytm

$$Alg(m,n) = \{k := m; \;\; s := 2^m; \;\; while \;\; k < n \;\; do \;\; k := k+1; \;\; s := s + 2^k \;\; od\}.$$

   Zbadaj, która z wymienionych formuł jest niezmiennikiem pętli w tym algorytmie?

   (a) $s = \sum_{i=m}^{k}(2^i)$,

   (b) $s = \sum_{i=1}^{k}(2^i)$,

(c) $s = 2^m + 2^{m+1} + ... + 2^k$,

(d) $s = 2^m + 2^{m+1} + ... + 2^n$.

Odpowiedź poprzyj dowodem indukcyjnym.

11. Niech $Alg(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ będzie następującym algorytmem. Zbadaj, która z wymienionych formuł jest niezmiennikiem pętli w tym algorytmie?

$Alg(n) = \{s := 0;\ \ i := 1;$

$\quad while\ \ i < n + 1\ \ \ do$

$\quad\quad s := s + i;\ \ i := i + 1$

$\quad od$

$\quad return\ \ s\}.$

(a) $s < n$,

(b) $s = \sum_{j=1}^{i} j$,

(c) $s = \sum_{j=1}^{i-1} j$,

(d) $s = \frac{i^2-1}{2} \wedge i > 0$,

(e) $s = \frac{i^2-i}{2}$.

Odpowiedź poprzyj dowodem indukcyjnym.

12. Niech $Alg(A, n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ będzie następującym algorytmem, dla A będącego tablicą liczb naturalnych długości n (indeksowaną od 1 do n włącznie). Określ rezultat działania algorytmu rozważanego algorytmu. Zbadaj, która z wymienionych formuł jest niezmiennikiem pętli w tym algorytmie?

$Alg(n) = \{p := A[1];\ \ q := A[1];\ \ i := 2$

$\quad while\ \ i < n + 1\ \ \ do$

$\quad\quad if\ \ A[i] > p\ \ then\ \ p := A[i]\ \ fi$

$\quad\quad if\ \ q > A[i]\ \ then\ \ q := A[i]\ \ fi$

$\quad\quad i := i + 1;$

$\quad od$

$\quad return\ \ (p, q)\}.$

(a) $p \geqslant q$,

(b) $i < n + 1$,

(c) $\forall (1 \leqslant j < i)(q \leqslant A[j] \leqslant p)$,

(d) $\exists (1 \leqslant j, k < i)(p = A[j] \wedge q = A[k])$.

Odpowiedź poprzyj dowodem indukcyjnym.

13. Niech $Alg(A, n, x)$, gdzie $n, x \in \mathbb{N}$ będzie następującym algorytmem, dla A będącego tablicą współczynników pewnego wielomianu W stopnia n (indeksowaną od 0 do n włącznie). Uzasadnij, że $Alg(A, n, x) = W(x)$ stosując następujący niezmiennik pętli $s = \sum_{j=i}^{n} A[j]x^{j-i}$.

$Alg(A, n, x) = \{i := n;\ \ s := A[n];$

$\quad while\ \ i > 0\ \ \ do$

$\quad\quad s := s * x;\ \ s := s + A[i-1];\ \ i := i - 1$

$\quad od$

$\quad return\ \ s\}.$

14. Niech $Alg(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ będzie następującym algorytmem. Podaj niezmiennik NZ pętli w tym algorytmie taki, że $\neg(i < n) \wedge NZ \Rightarrow s = n!$. Odpowiedź starannie uzasadnij.

$Alg(n) = \{s := 1;\ \ i := 0;$

$\quad while\ \ i < n\ \ \ do$

$\quad\quad i := i + 1;\ \ s := s * i$

$\quad od$

$\quad return\ \ s\}.$

15. Niech $Alg(a, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$ będzie następującym algorytmem. Podaj niezmiennik NZ pętli w tym algorytmie taki, że $\neg(w > 0) \wedge NZ \Rightarrow s = a^b$. Odpowiedź starannie uzasadnij.

$Alg(a, b) = \{s := 1;\ \ p := a;\ \ w := b;$

$\quad while\ \ w > 0\ \ \ do$

$\quad\quad if\ \ w \bmod 2 = 0\ \ then\ \ p := p * p;\ \ w := w/2$

$\quad\quad else\ \ s := s * p;\ \ w := w - 1\ \ fi$

$\quad od$

$\quad return\ \ s\}.$

16. Rozważmy następujący algorytm $Alg(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Określ warunek początkowy jaki powinna spełniać wartość zmiennej n taki, że $Alg(n) = true$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą. Wskaż niezmiennik pętli pozwalający uzasadnić poprawność algorytmu.

$Alg(n) = \{s := true;\ \ i := 1;$

$\quad while\ \ i \leqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor\ \ \ do$

$\quad\quad i := i + 1;$

$\quad\quad if\ \ n \bmod i = 0\ \ then\ \ s := false\ \ fi$

$\quad od$

$\quad return\ \ s\}.$