FUNKCJE

$f: x \to y$
x – dziedzina, zbiór argumentów
y – przeciwdziedzina

Funkcje różnowartościowe – różnym argumentom odpowiadają różne wartości

Przykład:
Czy funkcja:

$f(x) = \dfrac{2x_1 - 3}{x_1 + 5}$

jest różnowartościowa?

$$f(x_1) = f(x_2) \overset{?}{\Longrightarrow} x_1 = x_2$$

$$f(x_1) = \frac{2x_1 - 3}{x_1 + 5} = \frac{2x_2 - 3}{x_2 + 5} = f(x_2)$$

$$\cancel{2x_1x_2} + 10x_1 - 3x_2 - \cancel{15} = \cancel{2x_1x_2} - 3x_1 + 10x_2 - \cancel{15}$$
$$7x_1 = 7x_2$$
$$x_1 = x_2$$

Odp.: Funkcja **jest** różnowartościowa.

Funkcja odwrotna (f^{-1}):

Wykres f i f^{-1} są symetryczne względem $y = x$

$f^{-1}(f(x)) = x$

Funkcja odwrotna istnieje tylko dla funkcji różnowartościowej.

Przykład:

$f(x) = \dfrac{2x_1 - 3}{x_1 + 5}$

$D: R - \{-5\}$

Wyznaczyć x:

$y = \dfrac{2x - 3}{x + 5} \quad \because * (x + 5)$

$yx + 5y = 2x - 3$

$yx - 2x = -3 - 5y$

$x(y - 2) = 3 - 5y$

$x = \dfrac{-3 - 5y}{y - 2} = f^{-1} \quad ; \quad D: R - \{2\}$

$f: R - \{-5\} \longrightarrow R - \{2\}$

$f^{-1}: R - \{2\} \longrightarrow R - \{-5\}$

Funkcja liniowa:

$y = ax + b \quad ; \quad D(f): x \in R$

Funkcja kwadratowa:

$y = ax^2 + bx + c \quad ; \quad x \in R$

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$
$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac} \\ \boldsymbol{x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \end{cases}$$

Współrzędne wierzchołka paraboli:
$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$$

$y = x^2 \;;\quad x \in < 0, +\infty)$

$f^{-1}:\; y = \sqrt{x}$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x^2 - 6}}$

$D:\; 3x^2 - 6 > 0 \;\; \therefore \div 2$

$x^2 - 2 > 0$

$\cancel{\boldsymbol{a)\; (x - \sqrt{2}) > 0 \wedge (x + \sqrt{2}) > 0}}$

$\cancel{\boldsymbol{x > \sqrt{2} \wedge x > -\sqrt{2}}}$

lub

$b)\; (x - \sqrt{2}) < 0 \;\wedge\; (x + \sqrt{2}) < 0$

$x < \sqrt{2} \;\wedge\; x < -\sqrt{2}$

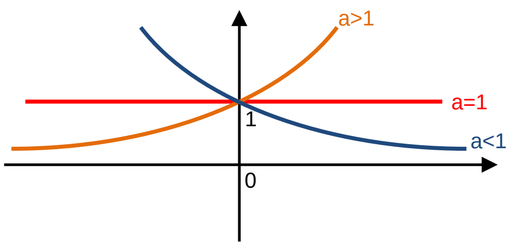
a) jest niemożliwe

$x < \sqrt{2} \;\wedge\; x < -\sqrt{2}$

$D: (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

Funkcja wykładnicza:

$y = a^x \;;\quad a > 0 \;;\quad x \in R$



e^x

e – liczba Eulera

$e \approx 2{,}71 \ldots.$

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Funkcją odwrotną do funkcji wykładniczej jest **funkcja logarytmiczna**:

$y = \log_a x \quad ; \quad D: x > 0$

$\log_a bc = a^c = b$

$\log_e x = \ln x$

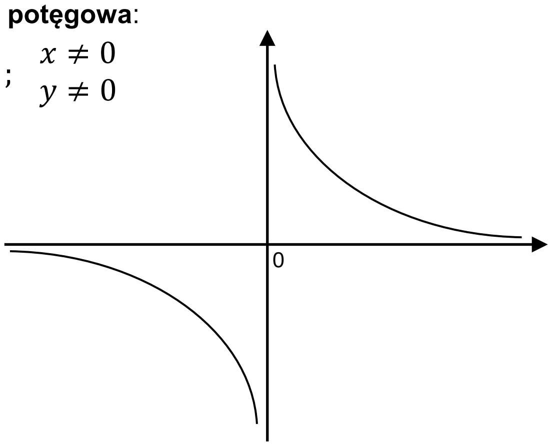
$\log x = \log_{10} x$

Równanie do okręgu o środku (x_0, y_0) i promieniu N:
$$\boldsymbol{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2}$$

Funkcja potęgowa:

$y = \frac{1}{x}$; $\begin{matrix} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix}$

$xy = 1$



Funkcje trygonometryczne:

$y = \sin x$; $x \in R$

$\begin{cases} \sin x : < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} > \longrightarrow < -1, 1 > \\ \arcsin x : < -1, 1 > \longrightarrow < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} > \end{cases}$

$\pi \approx 3{,}14 \ldots.$

$y = \cos x$; $x \in R$

$\begin{cases} \cos x : < 0, \pi > \longrightarrow < -1, 1 > \\ \arccos x : < -1, 1 > \longrightarrow < 0, \pi > \end{cases}$

$y = \tan x$; $x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k * \pi\right\}$; $k \in C$

$\begin{cases} \tan x : < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} > \longrightarrow R \\ \operatorname{artan} x : R \longrightarrow < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} > \end{cases}$

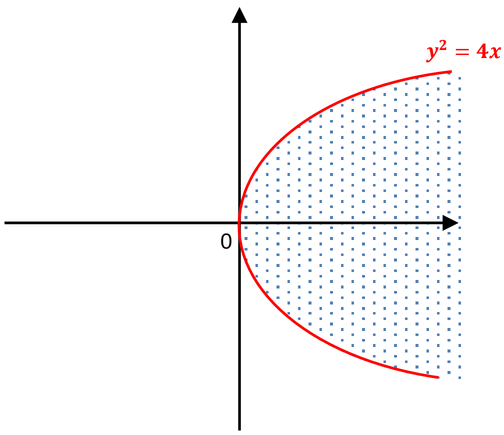
$y = \cot x$; $x \in R - \{k * \pi\}$

$\begin{cases} \cot x : < 0, \pi > \longrightarrow R \\ \operatorname{arccot} x : R \longrightarrow < 0, \pi > \end{cases}$

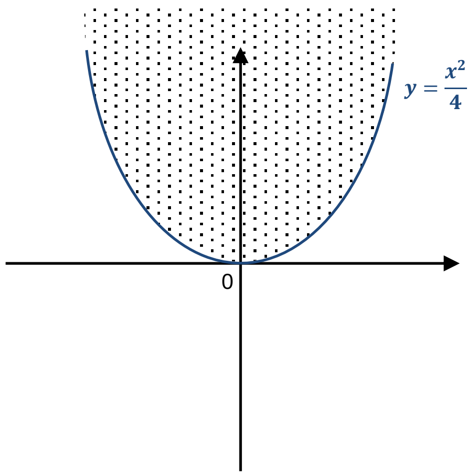
<u>**Zadanie**</u>:

Naszkicować zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają poniższe warunki:

A) $y^2 < 4x$



$x^2 < 4y \Longrightarrow y > \frac{x^2}{4}$



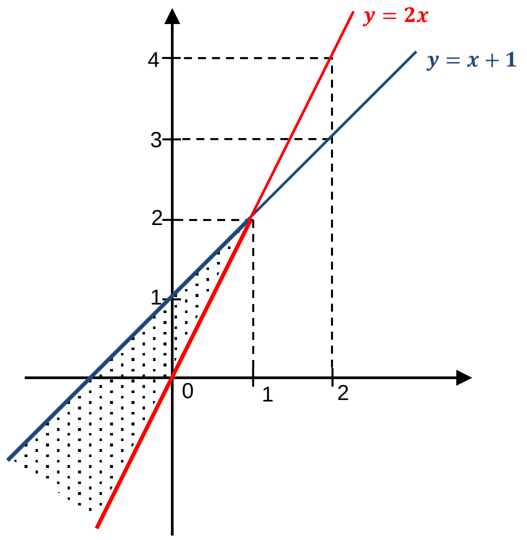
B) $2x \leq y \leq x + 1$

$$\Downarrow$$

$\boldsymbol{y \geq 2x} \quad \wedge \quad \boldsymbol{y \leq x + 1}$

x	**0**	**1**	**2**
y	0	2	4

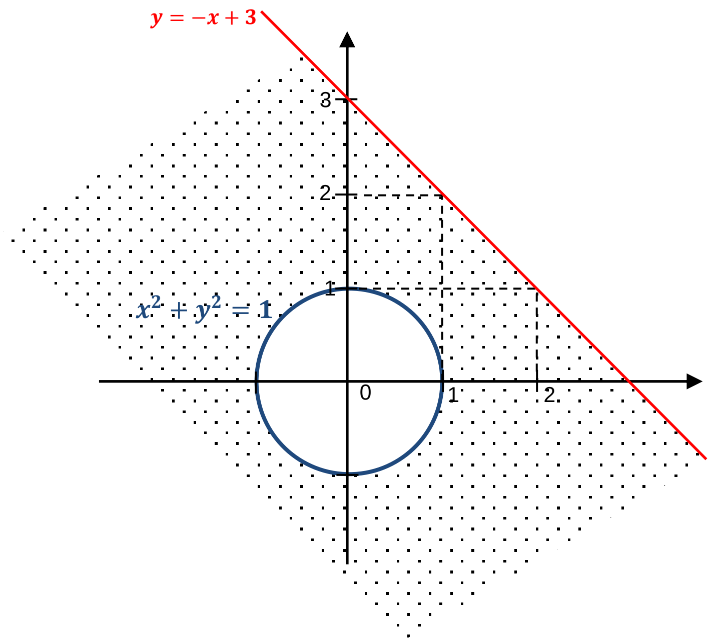
x	**0**	**1**	**2**
y	1	2	3



C) $x + y < 3 \;\; \wedge \;\; x^2 + y^2 \geq 1$

$\boldsymbol{y < -x + 3} \quad \wedge \quad \boldsymbol{x^2 + y^2 \geq 1}$

x	**0**	**1**	**2**
y	3	2	1



D)

$|x| < 2 \;\; \wedge \;\; |y| \leq \sqrt{4 - x^2} \quad ; \quad |a| \begin{cases} a\,, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$

$4 - x^2 \geq 0$

$(2 - x)(2 + x) \geq 0$

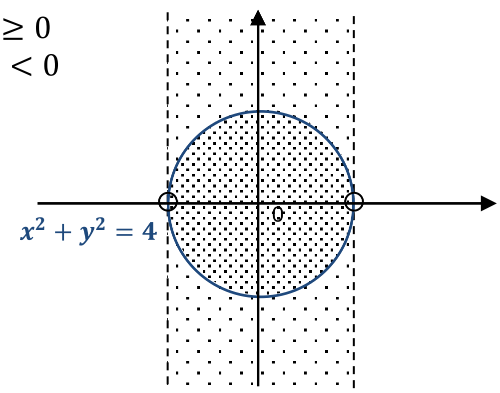
$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \wedge \quad \begin{matrix} 2 + x \geq 0 \\ x \geq -2 \end{matrix}$

lub

$\begin{cases} 2 - x < 0 \\ x > 2 \end{cases} \wedge \quad \begin{matrix} 2 + x < 0 \\ x < -2 \end{matrix}$

$y^2 \leq 4 - x^2$

$x^2 + y^2 = 4$



Zadanie:
Wyznaczyć analitycznie i naszkicować na płaszczyźnie dziedzinę funkcji:

a) $f(x,y) \quad ; \quad f\colon R^2 \longrightarrow R$

$f(x,y) = \arcsin(x+y)$

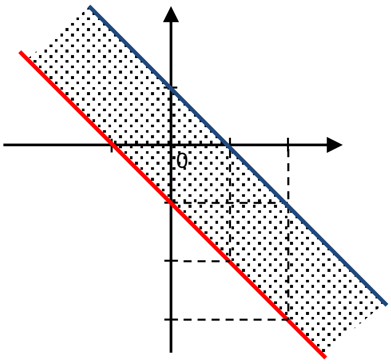
$-1 \le x+y \le 1$

$-1 \le x+y \quad \wedge \quad x+y \le 1$

$y \ge -x-1 \quad \wedge \quad y \le -x+1$

x	0	1	2
y	-1	-2	-3

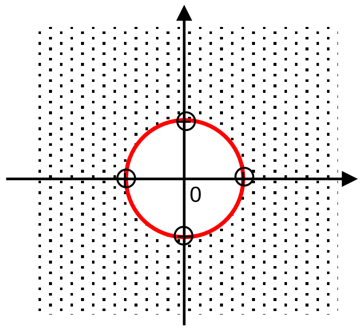
x	0	1	2
y	1	0	-1



b) $f(x,y) = 2^{\sqrt{x^2+y^2+1}} * \ln|x*y|$

$x^2+y^2 \ge 0 \quad \wedge \quad x*y \ne 0$

$x \ne 0 \quad \wedge \quad y \ne 0$



Zadanie:
Wyznacz i narysuj dziedzinę funkcji:

a) $f(x,y) = \arcsin(-x-27+8)$

b) $f(x,y) = \arcsin(2x-y+2)$

c) $f(x,y) = \arccos(2y-x+4)$

CIĄGI

$a_n = 2n-1 \quad ; \quad m > 0$

$a\colon N \longrightarrow R$

$a(n) = a_n$

Ciąg arytmetyczny:

$a_n = (1,4,7,10,\dots)$

$a_{n+1} - a_n = r = const.$

$r = 3 \quad a_1 = 1$

$a_n = a_1 + (n-1)*r$

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)*n}{2}$$

Ciąg geometryczny:

$b_n = \left(8, -4\sqrt{2}, 4, -2\sqrt{2}, \dots\right)$

$$q = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad a_1 = 8$$

$a_n = a_1 * q^{n-1}$

$$S_n = \frac{a_1*(1-q^n)}{1-q} \quad ; \quad |q| < 1$$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

Ciąg a_n jest ograniczony z góry wtedy, gdy:

$\exists_M \forall_n \; a_n < M$

Silnia

$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$$

Przykład:

$$\frac{7! * 4!}{5! * 2!} = 504$$

$$a_n = (n!)^{n+1}$$
$$a_{3n} = [(3n!)]^{3n+1}$$

Przykład:
Czy poniższy ciąg jest ograniczony?

$$a_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$$

$$a_n = \left(\sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}\right) * \frac{\sqrt{n+8} + \sqrt{n+3}}{\sqrt{n+8} + \sqrt{n+3}} = \frac{n+8-(n+3)}{\sqrt{n+8} + \sqrt{n+3}} = \frac{5}{\sqrt{n+8} + \sqrt{n+3}}$$

$$0 < \frac{5}{\sqrt{n+8} + \sqrt{n+3}} \leq \frac{5}{\sqrt{9} + \sqrt{4}}$$

Odp.: Ciąg jest ograniczony

Symbole nieoznaczone:

$$\infty - \infty \;;\; \infty * 0 \;;\; 0^{\infty} \;;\; \infty^{0} \;;\; \frac{\infty}{\infty} \;;\; \frac{0}{0}$$

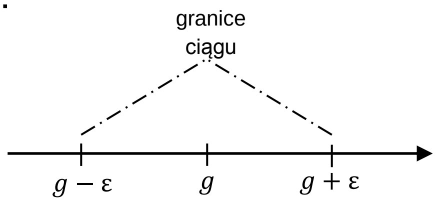
Gdy ciąg jest monotoniczny, to jest to ciąg malejący lub rosnący.

$$a_n = n^2 - 49n - 50$$

$$q = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-49)}{2} = 24{,}5$$

Granica ciągu:

$\varepsilon > 0$



$$\lim_{n\to\infty} a_n = q \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n \geq n_0} \; |a_n - q| \leq \varepsilon$$

Zadanie:
Sprawdź z definicji, że granica ciągu jest równa:

A)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$Niech\ \varepsilon > 0 \quad ; \quad Szukamy\ n_0$$

$$\left|\frac{1}{n_0} - 0\right| \leq \varepsilon \;\Rightarrow \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon \;\Rightarrow 1 \leq \varepsilon * n_0 \;\Rightarrow n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} \;\Rightarrow \quad \begin{matrix} \varepsilon = \mathbf{1} \;,\; n_0 = \mathbf{1} \\ \varepsilon = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}} \;;\; n_0 = \mathbf{100} \end{matrix}$$

B)

$\lim_{n\to\infty} \frac{3-n}{n+4} = -1 \quad ; \quad \varepsilon > 0$

$$\left|\frac{3-n_0}{n_0+4} - (-1)\right| \leq \varepsilon$$

$$\left|\frac{3-n_0}{n_0+4} + 1\right| \leq \varepsilon$$

$$\left|\frac{3-n_0+n_0+4}{n_0+4}\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{n_0+4}\right| \leq \varepsilon$$

$$\boxed{\frac{1}{n} \to \alpha \quad ; \quad \frac{1}{n^\alpha} \to 0}$$

$$\frac{1}{n_0+4} \leq \varepsilon \quad \therefore (n_0+4)$$

$$1 \leq \varepsilon n_0 + 4\varepsilon$$

$$\varepsilon n_0 \geq 1 - 4\varepsilon$$

$$n_0 \geq \frac{1-4\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$dla \ \varepsilon = \mathbf{\frac{1}{8}} \quad ; \quad n_0 = \mathbf{4}$$

Zadanie:
Określ granicę ciągu:

A)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^5 - 4n^3 + 23n - 107}{2\boldsymbol{n^5} + 15n^2 + 231} \quad \begin{matrix} \therefore \div n^5 \\ \therefore \div n^5 \end{matrix}$$

Dzielimy licznik i mianownik przez najwyższą potęgę mianownika

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7 - \frac{4}{n^2}(\to 0) + \frac{23}{n^4}(\to 0) - \frac{107}{n^5}(\to 0)}{2 + \frac{15}{n^3}(\to 0) + \frac{231}{n^5}(\to 0)} = \frac{7}{2}$$

B)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-23n^7 + 3n^2 - 54}{7\boldsymbol{n^5} + 2n - 1} \quad \begin{matrix} \therefore \div n^5 \\ \therefore \div n^5 \end{matrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-23n^2 + \frac{3}{n^3}(\to 0) - \frac{54}{n^5}(\to 0)}{7 + \frac{2}{n^4}(\to 0) - \frac{1}{n^5}(\to 0)} = -\infty$$

C)

$$\lim_{n\to 0} \frac{7\sqrt[3]{n^2} - 2\sqrt{n^3} + 15}{13\sqrt[6]{n^4} + 24\sqrt[7]{n^2} + 1} = \lim_{n\to 0} \frac{7n^{2/3} - 2n^{3/2} + 15}{13\boldsymbol{n^{2/3}} + 24n^{2/7} + 1} \quad \begin{matrix} \therefore \div n^{2/3} \\ \therefore \div n^{2/3} \end{matrix}$$

$$\lim_{n\to 0} \frac{7 - n^{5/6} + \frac{15}{n^{2/3}}(\to 0)}{13 + \frac{24n^{2/7}}{n^{2/3}}(\to 0) + \frac{1}{n^{2/3}}(\to 0)} = -\infty$$

D)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3*2^{3n-2}-8}{8^{n+1}+16}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}*8^n-8}{8*\mathbf{8^n}+16}\quad \begin{matrix}\therefore\div 8^n\\ \therefore\div 8^n\end{matrix}$$

$$2^{3n-2}=\frac{\mathbf{2^{3n}}}{\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{(2^3)^n}}{\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{8^n}}{\mathbf{4}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{4}-\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{8^n}}\ (\to \mathbf{0})}{8+\frac{\mathbf{16}}{\mathbf{8^n}}\ (\to \mathbf{0})}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{32}}$$

E)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^4+4)!+(n-1)!}{n*(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^4+4)*(n-1)!*n+(n-1)!}{(n-1)!*n^2*(n-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n-1)!}*[(n^4+4)*n+1]}{\cancel{(n-1)!}*n^2*(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^4+4)*n+1}{n^2*(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+4n+1}{\mathbf{n^3}+n^2}\quad \begin{matrix}\therefore\div n^3\\ \therefore\div n^3\end{matrix}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{n^2}}\ (\to \mathbf{0})+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^3}}\ (\to \mathbf{0})}{1+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\ (\to \mathbf{0})}=+\infty$$

F)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+2n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+2n}*\frac{\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+1-n^2+2n}{\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{\mathbf{n^2}+4n+1}+\sqrt{n^2+2n}}\quad \begin{matrix}\therefore\div n^2\\ \therefore\div n^2\end{matrix}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2}}\ (\to \mathbf{0})}{\sqrt{1+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{n}}\ (\to \mathbf{0})+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2}}\ (\to \mathbf{0})}+\sqrt{1+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{n}}\ (\to \mathbf{0})}}=\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=\mathbf{1}$$

DO DOMU:

Określ granicę ciągu:

a)

$$a_n=\frac{3}{\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+n}}$$

b)

$$a_n=\sqrt{n}*\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

c)

$$a_n=\frac{\sqrt{1+4n^2}-\sqrt{1+9n^2}}{2n}$$