Rozkład Poissona

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$

Zadanie 1

Liczba huraganów w pewnym rejonie USA ma rozkład Poissona. Średnio w ciągu roku obserwuje się 3 huragany. Oblicz p-stwo, że w ciągu roku wystąpią: a) dokładnie 2 huragany b) co najmniej 2 huragany

Niech X to liczba huraganów $X \sim P(\lambda)$ $EX=3=\lambda$

a) $P(X=2)=\frac{e^{-3}\cdot 3^2}{2!}=\frac{9}{2}e^{-3}\approx 0{,}22$

b) $P(X\geqslant 2)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+\ldots \iff 1-P(X<2)=1-[P(X=0)+P(X=1)]$

$P(X=0)=\frac{e^{-3}\cdot 3^0}{0!}=e^{-3}$ $P(X=1)=\frac{e^{-3}\cdot 3^1}{1!}=3e^{-3}$ $1-P(X<2)=1-4e^{-3}\approx 0{,}8$

Zadanie 2

Zmienna losowa X ma rozkład Poissona. Średnio zdarzenie występuje 100 razy. $X\sim P(100)$

Oblicz prawdopodobieństwo występowania zdarzenia dokładnie 97 razy. $P(X=97)$

a) korzystając z definicji b) aproksymacją rozkładu Poissona rozkładem normalnym

a) $\lambda=100$ $k=97$ $P(X=97)=\frac{e^{-100}\cdot 100^{97}}{97!}\approx$ WolframAlpha ≈ 0.038

b) $X\sim P(\lambda)$ $Y\sim N(\lambda,\sqrt{\lambda})$ $P(X=k)\approx P(k-\frac{1}{2}\leqslant Y\leqslant k+\frac{1}{2})$ $P(a\leqslant X\leqslant b)\approx P(a-\frac{1}{2}\leqslant Y\leqslant b+\frac{1}{2})$

$$P(X=97)\approx \underbrace{P(96{,}5\leqslant Y\leqslant 97{,}5)}_{Y\sim N(100,10)}=P\Big(\frac{96{,}5-100}{10}\leqslant \underbrace{\frac{Y-100}{10}}_{\sim N(0;1)}\leqslant\frac{97{,}5-100}{10}\Big)=P\Big(-0.35\leqslant\frac{Y-100}{10}\leqslant -0{,}25\Big)$$

$\Phi(-0{,}25)-\Phi(-0.35)=1-\Phi(0.25)+\Phi(0.35)-1=0.6368-0.5984=0{,}0381$

Rozkład dwumianowy

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k} \quad ; q=1-p \qquad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zadanie 1

Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy ze średnią 4 i wariancją 2. Oblicz $P(X=3)$

$E(x)=np=4 \qquad V(x)=npq=2 \Rightarrow p=\frac{1}{2} \quad q=\frac{1}{2} \Rightarrow n=8 \Rightarrow X\sim b(8,\frac{1}{2})$

$P(X=3)=\binom{8}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{8!}{3!\cdot 5!}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{32}=\frac{\cancel{5!}\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{3!\cdot \cancel{5!}}\cdot\frac{1}{256}=\frac{7}{32}$

Zadanie 2

Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy i znane jest p-stwo uzyskania co najmniej raz sukcesu w 4 próbach, $P(x\geq 1)=\frac{80}{81}$. Jakie jest p-stwo uzyskania sukcesu w pojedynczej próbie $X\sim b(4,p)$

$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=1-\binom{4}{0}p^0\cdot(1-p)^4=\frac{80}{81}$

$1-(1-p)^4=\frac{80}{81}$

$1-p=\frac{1}{3} \Rightarrow p=\frac{2}{3}$

Zadanie 3

W fabryce produkującej 1000 tranzystorów dziennie p-stwo wyprodukowania wadliwego tranzystora wynosi 0.04. Oblicz p-stwo wyprodukowania danego dnia mniej niż 30 wadliwych tranzystorów.

Niech X to liczba wadliwych tranzystorów

$X\sim b(1000,\ 0.04)$

$P(X<30)=P(X=0)+P(X=1)+\ldots+P(X=29)$

$X\sim b(n,p) \qquad Y\sim N(np;\sqrt{npq}) \qquad P(X=k)\approx P(k-\frac{1}{2}\leq Y\leq k+\frac{1}{2}) \qquad P(a\leq x\leq b)\approx P(a-\frac{1}{2}\leq Y\leq b+\frac{1}{2})$

$P(x<30)=P(0\leq X\leq 29)\approx P(-\frac{1}{2}\leq Y\leq 29\frac{1}{2})=P\left(\frac{-\frac{1}{2}-40}{6.2}\leq\frac{Y-40}{6.2}\leq\frac{29.5-40}{6.2}\right)=P(-6.53\leq\frac{Y-40}{6.2}\leq -1.69)=$

$Y\sim N(40;6{,}2)=Y\sim N(40;\ \underset{6.2}{\sqrt{1000\cdot 0{,}04\cdot 0{,}96}})$

$=\Phi(-1{,}69)-\underbrace{\Phi(-6.53)}_{1}=1-0.3545=0.045$

Zadanie 4

Jeden procent samochodów ma niesprawne tylne światło. Ile samochodów należy zbadać aby p-stwo znalezienia przynajmniej jednego z niesprawnymi światłami wynosiło przynajmniej ½?

Niech X to liczba samochodów z niesprawnymi światłami

$X\sim b(n,\frac{1}{100})$

$P(X\geq 1)\geq\frac{1}{2} \Rightarrow 1-P(X=0)\geq\frac{1}{2} \Rightarrow P(X=0)\leq\frac{1}{2}$

$\underbrace{\binom{n}{0}}_{1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{100}\right)^0}_{1}\left(\frac{99}{100}\right)^n\leq\frac{1}{2}\ /\ln()$

$n\cdot\ln\left(\left(\frac{99}{100}\right)^n\right)\leq\ln\frac{1}{2} \quad // : \ln\left(\frac{99}{100}\right)<1$

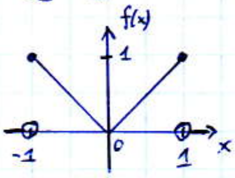
$n\geq\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{99}{100}\right)}\approx 68.97$

Zmienne losowe ciągłe

Zadanie

Zmienna losowa X ma rozkład dany gęstością

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\in\langle -1,0)\\ x, & x\in\langle 0,1\rangle\\ 0, & x\in\sim\end{cases}$$



Wyznacz: $P(x>0\mid x<\frac{1}{2})$ EX VX DX $q_{0,75}$ dystrybuantę

$$P(x>0\mid x<\tfrac{1}{2})=\frac{P(x\geq 0\wedge x<\frac{1}{2})}{P(x<\frac{1}{2})}=\frac{P(0<x<\frac{1}{2})}{P(x<\frac{1}{2})}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}f(x)\,dx}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}x\,dx}{-\int_{-1}^{0}x\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}x\,dx}=\frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}}{-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{\frac{1/4}{2}-0}{-[0-\frac{1}{2}]+\frac{1/4}{2}-0}=\frac{1/8}{5/8}=\frac{1}{5}$$

Jeśli w przedziale są dwie różne funkcje to całkę trzeba zamienić na sumę całek

- wartość oczekiwana $EX=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x)\,dx$

$$EX=\int_{-1}^{0}x\cdot(-x)\,dx+\int_0^1 x\cdot x\,dx=-\int_{-1}^{0}x^2\,dx+\int_0^1 x^2\,dx=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=-\left[\frac{0}{3}-(-\frac{1}{3})\right]+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$$

- wariancja $V(x)=E(x^2)-(EX)^2$ $\quad E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\cdot f(x)\,dx$

$$E(x^2)=\int_{-1}^{0}x^2\cdot(-x)\,dx+\int_0^1 x^2 x\,dx=-\int_{-1}^{0}x^3\,dx+\int_0^1 x^3\,dx=-\left[\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1=-\left[\frac{0}{4}-\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$V(x)=\frac{1}{2}-0^2=\frac{1}{2}$$

- odchylenie standardowe $D(x)=\sqrt{V(x)}$

$$D(X)=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- kwantyl rzędu α $\quad \alpha=\int_{-\infty}^{q_\alpha}f(x)\,dx$

$$0{,}75=\frac{1}{2}+\int_0^{q_{0,75}}x\,dx\Rightarrow\frac{1}{4}=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{q_{0,75}}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{q^2}{2}\ /\cdot 2\Rightarrow q^2-\frac{1}{2}=0\Rightarrow q_{0,75}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- dystrybuanta $F(x)=P(X\leq x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$

$$F(x)=\begin{cases}\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x}0\,dt=0 & x<-1\\ \int_{-\infty}^{-1}f(t)\,dt+\int_{-1}^{x}(-t)\,dt & x\in\langle -1,0)\\ \int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt+\int_{-1}^{0}-t\,dt+\int_0^x t\,dt & x\in\langle 0,1\rangle\\ \int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt=1 & x>1\end{cases}$$

$$\begin{cases}0 & x<-1\\ 0-\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x} & x\in\langle -1,0)\\ 0+\frac{1}{2}+\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x & x\in\langle 0,1\rangle\\ 1 & x>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0 & x<-1\\ -\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} & x\in\langle -1,0)\\ \frac{x^2}{2}+\frac{1}{2} & x\in\langle 0,1\rangle\\ 1 & x>1\end{cases}$$