Zadanie 1. a)

Y / X	0	1	2	
-1	0.1	0.1	0.25	**0.45**
1	0.05	0.25	0	**0.3**
3	0.1	0	0.15	**0.25**
	0.25	**0.35**	**0.4**	

$$EXY=\sum_i\sum_j x_i x_j p_{ij} = 0-0.1-0.5+0+0.25+0+0+0+0.9=0.55$$

$$EX=\sum_{i=1}^{3} x_i p_{i\bullet} = -1*0.45+1*0.3+3*0.25=0.6$$

$$EY=\sum_{i=1}^{2} y_j p_{\bullet j}=1.15$$

$$Cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=-0,14$$

$$EX^2=\sum_{i=1}^{3} x_i^{\ 2} p_{i\bullet}=(-1)^2*0.45+1^2*0.3+3^2*0.25=3$$

$$EY^2=\sum_{i=1}^{2} y_j^{\ 2} p_{\bullet j}=0^2*0.25+1^2*0.35+2^2*0.4=1.95$$

$$DX=\sqrt{D^2X}=\sqrt{EX^2-(EX)^2}$$

$$DY=\sqrt{D^2Y}=\sqrt{EY^2-(EY)^2}$$

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{DXDY}$$

b) $E(3X+Y^2)=3EX+EY^2=3\cdot 0,6+1,95=3,75$

Zadanie 2.

Gestosci brzegowe

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^2 & \text{dla} \quad -1\le x\le 1\\ 0 & \text{przeciwnie}\end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}y & \text{dla} \quad 0\le y\le 2\\ 0 & \text{przeciwnie}\end{cases}$$

Gestosc X z caki: $\int_0^2 \frac{3}{4}x^2 y dy=\frac{3}{2}x^2$

Gestosc Y z caki: $\int_{-1}^{1} \frac{3}{4}x^2 y dx=\frac{1}{2}y$

Można zauważy, że X i Y są niezależne, stąd $\rho = 0$

lub wykonać rachunek:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_{-1}^{1} x\left(\frac{3}{2}x^2\right)dx = 0$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \int_{0}^{2} y\left(\frac{1}{2}y\right)dy = \frac{4}{3}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{2} \frac{3}{4}x^3y^2dy = 0$$

$$Cov(X,Y) = EXY - EXEY = 0$$

$$\rho = 0$$

Zadanie 3.

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{gdy} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{przeciwnie} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{y^3}{12} & \text{gdy} \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{przeciwnie} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int_{0}^{1} 4x^4dx = \frac{4}{5}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \int_{0}^{2}\left(\frac{2}{3}y - \frac{y^4}{12}\right)dy = \frac{8}{15}$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy = \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{2x} 2x^3y\,dy = \frac{2}{3}$$

$$Cov(X,Y) = \frac{2}{3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{8}{15}$$

Zadanie 4.

Z = 2X-4Y, T=3Y

Mozna udowodnic z tw. na wykladzie:

aZ+bT = 2aX - 4aY + 3bY = (2a)X + (-4a+3b)Y ma roklad normalny,

bo X i Y maja rozklad normalny.

To jest ogólnie znany fakt, ze dowolna kombinacja zmiennych normalnych ma równiez rozklad normalny.

Stad (Z,T) ma 2-wym. rozklad normalny.

Teraz jego parametry

$EZ = 2EX-4EY = 0$

$ET = 3EY = 0$

$VarZ = 4VarX + 16* VarY = 20$ (bo niezalezne)

$VarT = 9* VarY = 9$

Cov(Z,T) = E(ZT) = 6*E(XY) -12*E(Y^2) =-12 (bo EXY = 0 z niezalaznosci)

stad wsp. korelacji = -12/(3*sqrt(20)) = -2/sqrt(5)

Zatem (Z,T) ~ N (0,0, sqrt(20), 3, -2sqrt(5)/5)