Wykład V

Zadanie 1.

Zmienna losowa X ma rozkład:

X	-5	0	5	10
p(x)	1/5	3/10	2/10	3/10

a)

$$EX = -5 \cdot \frac{2}{10} + 0 \cdot \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{2}{10} + 10 \cdot \frac{3}{10} = 3$$

$$EX^2 = (-5)^2 \cdot \frac{2}{10} + 0^2 \cdot \frac{3}{10} + 5^2 \cdot \frac{2}{10} + 10^2 \cdot \frac{3}{10} = 40$$

$$VarX = 40 - (3)^2 = 31 \Rightarrow \sigma = \sqrt{31}$$

$$MedX = [0,5]$$

Zadanie 2.

$P(X = -1) = 0{,}2$; $P(X = 1) = a$; $P(X = 3) = 0{,}1$ $P(X = 5) = b$

a)

MedX = 1 wyznaczyć a i b.

MedX = 1 => $\begin{cases} P(X \le 1) \ge \frac{1}{2} \\ P(X \ge 1) \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}2 + a \ge 0{,}5 \\ a + 0{,}1 + b \ge 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0{,}3 \\ a + b \ge 0{,}4 \end{cases}$

Oczywiście $0{,}2 + a + 0{,}1 + b = 1 \Leftrightarrow a + b = 0{,}7 \quad i \quad a, b \ge 0$

Zatem $a \in [0{,}3; 0{,}7] \quad i \quad b = 0{,}7 - a$

Jeśli a=0.3, b=0.4 to wtedy medianą będzie [1,3], a nie tylko 1

Podsumowując, jeśli MedX = 1, to $a \in (0{,}3; 0{,}7] \quad i \quad b = 0{,}7 - a$

b)

MedX jest każda liczba z przedziału $[3,5]$. Wyznaczyć a i b.

Aby MedX była każdą liczbą z przedziału $[3,5]$ musi zachodzić, że w szczególności zarówno 3, jak i 5 jest medianą.

MedX = 3 => $\begin{cases} P(X \le 3) \ge \frac{1}{2} \\ P(X \ge 3) \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2 + a + 0,1 \ge 0,5 \\ 0,1 + b \ge 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 0,2 \\ b \ge 0,4 \end{cases}$

MedX = 5 => $\begin{cases} P(X \le 5) \ge \frac{1}{2} \\ P(X \ge 5) \ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,2 + a + 0,1 + b \ge 0,5 \\ b \ge 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b \ge 0,2 \\ b \ge 0,5 \end{cases}$

Podsumowując oba warunki $\begin{cases} a \ge 0,2 \\ b \ge 0,5 \end{cases}$ ale $0,2 + b + 0,1 + b = 1$ zatem $a + b = 0,7$.

Czyli musi być $a = 0,2$ i $b = 0,5$

Zauważamy, że dla a=0,2 i b=0m5 dla każdego $x \in [3,5]$ zachodzi $P(X \le x) = 0,5$ i $P(X \ge x) = 0,5$, zatem każdy $x \in [3,5]$ jest medianą X, czyli ostatecznie każda liczba z przedziału $[3,5]$ jest medianą X.

Zadanie 3.

Niech X oznacza zmienną losową opisującą liczbę osób **nie** posiadających karty kredytowej wśród próby 10 osób.
Zatem $X \sim Bin(10,0.7)$
Mamy obliczyć

$$P(X \le 7) = 1 - P(X > 7) = 1 - [P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)] =$$
$$= 1 - \binom{10}{8} \cdot (0.7)^8 \cdot (0.3)^2 - \binom{10}{9} \cdot (0.7)^9 \cdot 0.3 - \binom{10}{10} \cdot (0.7)^{10}$$

Zadanie 4.

X – zmienna losowa opisujące liczbę klientów w banku w ciągu godziny m

X~P(100) (bank ma średnio w ciągu godziny 100 klientów)

a) $P(X = 0) = e^{-100} \cdot \frac{100^0}{0!} = e^{-100}$

a) Skorzystamy z przybliżenia rozkładem normalnym $N(100; \sqrt{100})$, czyli $N(100;10)$

Zatem: $$P(X \geq 75) = 1 - P(X \leq 74) = 1 - P\left(\frac{X - 100}{10} \leq \frac{74 - 100}{10}\right) =$$
$$= 1 - \Phi(-2.6) = \Phi(2.6) = 0{,}9953$$