Zadanie 1.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 > \mu_2$

Poziom istotności $\alpha = 0,05$

Obie próby są liczne. Do weryfikacji hipotezy zerowej stosujemy statystykę:

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

która – przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 – ma rozkład normalny N(0; 1).

U nas:

$n_1 = 120$	$n_2 = 100$
$\bar{x} = 450$	$\bar{y} = 420$
$s_1 = 150$	$s_2 = 120$

A zatem:

$$Z = \frac{450 - 420}{\sqrt{\frac{150^2}{120} + \frac{120^2}{100}}}$$

$$Z = 1,648$$

Zbiorem krytycznym – wobec przyjętej postaci hipotezy alternatywnej jest przedział:

$$C = \{z : z \geq z_{1-\alpha}\} = \langle z_{1-\alpha}; +\infty)$$

$z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,6449$

Wobec tego:

$$C = \langle 1,6449; +\infty)$$

Jak widać:

$$Z \in C$$

Na poziomie istotności 0,05 odrzucamy hipotezę zerową na korzyść alternatywnej. Wyniki uzyskane na podstawie próby pozwalają twierdzić, że przeciętne miesięczne opłaty za mieszkanie w Warszawie są wyższe niż w Łodzi.

Zadanie 2.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 < \mu_2$

Poziom istotności $\alpha = 0{,}01$

W tym przypadku znamy odchylenia standardowe w obu populacjach. Statystyka testowa wyraża się wzorem:

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 statystyka ta ma rozkład normalny N(0; 1).

U nas:

$n_1 = 30$ $\qquad$ $n_2 = 35$

$\bar{x} = 9{,}9$ $\qquad$ $\bar{y} = 16{,}7$

$\sigma_1 = 4{,}9$ $\qquad$ $\sigma_2 = 7{,}0$

Obliczamy:

$$Z = \frac{9{,}9 - 16{,}7}{\sqrt{\frac{4{,}9^2}{30} + \frac{7^2}{35}}}$$

$$Z = -4{,}584$$

Zbiorem krytycznym – wobec przyjętej postaci hipotezy alternatywnej jest przedział:

$$C = \{z : z \le -z_{1-\alpha}\} = \left(-\infty; -z_{1-\alpha}\right\rangle$$

$z_{1-\alpha} = z_{0,99} = 2{,}3263$

Wobec tego:

$$C = \left(-\infty; -2{,}3263\right\rangle$$

Jak widać:

$$Z \in C$$

Na poziomie istotności 0,01 odrzucamy hipotezę zerową na korzyść alternatywnej. Wyniki uzyskane na podstawie próby pozwalają twierdzić, że średni poziom ołowiu we krwi osób (kobiet) mieszkających przy trasach szybkiego ruchu jest wyższe niż u osób (kobiet) mieszkających z dala od takich tras.

Zadanie 3.

H_0: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$

H_1: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 > 0$

Poziom istotności $\alpha = 0,01$

W zadaniu mamy do czynienia z próbami zależnymi. Zadanie jest więc tożsame z weryfikacją hipotezy o wartości oczekiwanej jednaj zmiennej $d_i = x_i - y_i$. Próba pochodzi z populacji o rozkładzie normalnym i nieznanym odchyleniu standardowym, a zatem do weryfikacji hipotezy wykorzystamy statystykę:

$$T = \frac{\bar{d}}{S_D} \cdot \sqrt{n}$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 statystyka ta ma rozkład t-Studenta o (n-1) stopniach swobody.

Obliczamy zatem średnią arytmetyczną zmiennej d_i.

x_i	y_i	d_i
5,5	4,5	1,0
6,0	6,0	0,0
7,0	6,0	1,0
4,5	4,0	0,5
5,5	5,0	0,5

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{3,0}{5} = 0,6$$

$$S_D^2 = \frac{1}{4} \cdot \sum_{i=1}^{5} (d_i - \bar{d})^2 = 0.175 \;\; => \;\; S_D = 0.41833$$

$$T = \frac{0,6}{0,41833} \cdot \sqrt{5} = 3,207135$$

Zbiorem krytycznym – wobec przyjętej postaci hipotezy alternatywnej jest przedział:

$$C = \left\langle t_{1-\alpha}^{n-1}; +\infty \right)$$

$t_{1-\alpha}^{n-1} = t_{0,99}^{4} = 3,747$

Wobec tego:

$$C = \left\langle 3,747; +\infty \right)$$

Jak widać:

$$T \notin C$$

Na poziomie istotności 0,01 nie odrzucamy hipotezę zerowej.

Wyniki uzyskane na podstawie próby nie pozwalają twierdzić, że przeciętny czas wykonania zabiegu nową metodą jest krótszy od czasu wykonania zabiegu starą metodą.

Zadanie 4.

H_0: $p = 0,35$

H_1: $p \neq 0,35$

Poziom istotności $\alpha = 0,02$.

Do weryfikacji użyjemy statystyki testowej:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 statystyka ta ma rozkład normalny N(0; 1).

U nas: $n = 1600$

$$\hat{p} = \frac{1600 - 1000}{1600}$$

$$\hat{p} = 0,375$$

Zatem:

$$Z = \frac{0,375 - 0,35}{\sqrt{\frac{0,35 \cdot 0,65}{1600}}} = 2,09657$$

Zbiorem krytycznym – wobec przyjętej postaci hipotezy alternatywnej jest przedział:

$$C = \left\{ Z: \quad |z| \geq z_{1-\alpha/2} \right\}$$

U nas $1 - \alpha/2 = 0{,}99$

$z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}99} = 2{,}326$

Wobec tego:

$$C = \left(-\infty, -2{,}326\right\rangle \quad \cup \quad \left\langle 2{,}326, +\infty\right)$$

Jak widać:

$$Z \notin C$$

Na poziomie istotności 0,02 stwierdzamy brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. Uzyskane na podstawie próby wyniki nie dają podstaw do stwierdzenia, by spodziewana frekwencja miała być istotnie różna od 35%.