Zadanie 1. a)

Y / X	0	1	2
-1	0.1	0.1	0.3
1	0	0.2	0
3	0.1	0	0.2

$$EXY = \sum_i \sum_j x_i x_j p_{ij} = 0 + (-0,1) + (-0,6) + 0 + 0,2 + 0 + 0 + 0 + 1,2 = 0,7$$

$$EX = \sum_{i=1}^{3} x_i p_{i\bullet} = -1 * 0,5 + 1 * 0,2 + 3 * 0,3 = 0,6$$

$$EY = \sum_{i=1}^{2} y_j p_{\bullet j} = 0 * 0,2 + 1 * 0,3 + 2 * 0,5 = 1,3$$

$$Cov(X,Y) = EXY - EX \cdot EY = 0,7 - 0,6 * 1,3 = ...$$

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_{i\bullet} = (-1)^2 * 0,5 + 1^2 * 0,2 + 3^2 * 0,3 = 3,4$$

$$EY^2 = \sum_{i=1}^{2} y_j^2 p_{\bullet j} = 0^2 * 0,2 + 1^2 * 0,3 + 2^2 * 0,5 = 2,3$$

$$DX = \sqrt{D^2 X} = \sqrt{EX^2 - (EX)^2}$$

$$DY = \sqrt{D^2 Y} = \sqrt{EY^2 - (EY)^2}$$

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{DXDY}$$

b) $E(X^2 Y) = \sum_i \sum_j x_i^2 x_j p_{ij} = 0 + 0,1 + 0,6 + 0 + 0,2 + 0 + 0 + 0 + 3,6 = 4,5$

Zadanie 2.

$$\text{f(x,y)} = \begin{cases} \frac{3}{4} x^2 y & \text{gdy} \quad -1 \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le 2, \\ 0 & \quad \textit{przeciwnie} \end{cases}$$

Gestosci brzegowe

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} x^2 & \text{dla} \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{przeciwnie} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} y & \text{dla} \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{przeciwnie} \end{cases}$$

Widać ze zmienne są niezależne, stad $\rho = 0$

Z rachunku tez to widać:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3dx=0$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy=\frac{1}{2}\int_{0}^{2} y^2dy=\frac{4}{3}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy=\frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x^3dx\cdot\int_{0}^{2} y^2dy=0$$

$$Cov(X,Y)=EXY-EXEY=0$$

$$\rho=0$$

Zadanie 3.

$$\text{f(x,y)}=\begin{cases} 2x^2 & \text{gdy} \quad 0\le y\le 2x\le 2, \\ 0 & \quad \textit{przeciwnie} \end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} 4x^3 & \text{gdy} \quad 0\le x\le 1 \\ 0 & \quad \text{przeciwnie} \end{cases} \qquad f_Y(y)=\begin{cases} \frac{2}{3}-\frac{y^3}{12} & \text{gdy} \quad 0\le y\le 2 \\ 0 & \quad \text{przeciwnie} \end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx=\int_{0}^{1} 4x^4dx=\frac{4}{5}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy=\int_{0}^{2}\left(\frac{2}{3}y-\frac{y^4}{12}\right)dy=\frac{4}{5}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy=2\int_{0}^{1} x^3dx\int_{0}^{2x} ydy=\frac{2}{3}$$

$$Cov(X,Y)=\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}$$

Zadanie 4.

Z = Y-2X, T=X+3Y

Mozna udowodnic z tw. na wykladzie:

aZ+bT = aY-2aX + bX+ 3bY = (b-2a)X + (a+3b)Y   ma roklad normalny, bo X i Y maja rozklad normalny.

To jest ogólnie znany fakt, ze dowolna kombinacja zmiennych normalnych ma równiez rozklad normalny.

Stad (Z,T) ma 2-wym. rozklad normalny.

Teraz jego parametry

EZ = EY-2EX = 0
ET = EX+3EY = 0

VarZ = VarY+ 4VarX = 5 (bo niezalezne)
VarT = VarX+ 9* VarY = 10

Cov(Z,T) = E(ZT) = E(XY)+3*EY^2 - 2*EX^2 – 6*E(XY)=3-2=1
(bo EXY = 0 z niezalaznosci)
stad wsp. korelacji = 1/sqrt(50)

Zatem (Z,T) ~ N (0,0, sqrt(5), sqrt(10), 1/sqrt(50))