Wykład VI

Zadanie 1. (za 2 pkt)

Dana jest zmienną losową X o gęstości

$$f(x)=\begin{cases}0 & dla \quad x<-1\\ x^4+x^2 & dla \quad x\in[-1,0)\\ C\sin x & dla \quad x\in[0,\pi/2)\\ 0 & dla \quad x\geq \pi/2\end{cases}.$$

(a) Oblicz stałą C i dystrybuantę zmiennej X.
(b) Oblicz wartość oczekiwaną zmiennej X.

1. a)

$C=?$

$F(x)=?$

ze stwierdzenia $P(-\infty<X<+\infty)=\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{0}x^4+x^2dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}C\sin x dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty}0dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}x^4+x^2dx+C\cdot\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}+C\cdot(-\cos x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+C\cdot 1=\frac{8}{15}+C$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\frac{8}{15}+C \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$$

$$\frac{8}{15}+C=1 \quad \Big/-\frac{8}{15}$$

$$\boxed{C=\frac{7}{15}}$$

$f(x)$ jest funkcją ciągłą, można więc skorzystać z twierdzenia:

$F'(x)=f(x)$ dla każdego x

dla $x<-1$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(s)ds=\int_{-\infty}^{x}0ds=0$$

dla $x\in\langle-1;0)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(s)ds=\int_{-1}^{x}x^4+x^2dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{x}=\frac{x^6}{5}+\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}=$$

$$=\frac{x^6+x^5}{5}+\frac{x^4+x^3}{3}$$

dla $x \in \langle 0; \frac{\pi}{2})$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-1}^{0} x^4+x^2dx + \int_{0}^{x} \frac{7}{15}\sin x dx = \frac{8}{15} + \frac{7}{15}\cdot(-\cos x)\Big|_0^x =$$

$$= \frac{8}{15} + \frac{7}{15}\cdot(-\cos x+1) = \frac{8}{15} + \frac{7}{15} - \frac{7}{15}\cos x = 1 - \frac{7}{15}\cos x$$

dla $x \geqslant \frac{\pi}{2}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_{-1}^{0} x^4+x^2dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{7}{15}\sin x dx = \frac{8}{15} + \frac{7}{15} = 1$$

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x<-1 \\ \frac{x^6+x^5}{5} + \frac{x^4+x^3}{3} & \text{dla } x \in \langle -1; 0) \\ 1 - \frac{7}{15}\cos x & \text{dla } x \in \langle 0; \frac{\pi}{2}) \\ 1 & \text{dla } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}}$$

b) $EX = ?$

z definicji wartości oczekiwanej:

$EX = \int_{-\infty}^{\infty} s f(s)ds$, pod warunkiem istnienia całki $\int_{-\infty}^{\infty} |s| f(s)ds$

Sprawdzam warunek konieczny:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx = \int_{-1}^{0} |x|(x^4+x^2)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} |x|\frac{7}{15}\sin x dx =$$

$$= \frac{1}{12}x^4(2x^2+3)\operatorname{sgn}(x)\Big|_{-1}^{0} + \frac{7}{15}\operatorname{sgn}(x)(\sin x - x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$= \frac{5}{12} + 1 = 1\frac{5}{12}$ – całka istnieje, więc EX istnieje

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} s f(s)ds$$

$$EX = \int_{-\infty}^{-1} x\cdot 0dx + \int_{-1}^{0} x(x^4+x^2)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cdot\frac{7}{15}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} x\cdot 0dx =$$

$$= \frac{7}{15}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx + \int_{-1}^{0} x^5+x^3dx = \left(\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{7}{15}(\sin x - x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{5}{12} + \frac{7}{15}\cdot 1 = \frac{7}{15} - \frac{5}{12} = \frac{1}{20}$$

Odp. $EX = \mu_X = \frac{1}{20}$.

Zadanie 2.

Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o średniej 2/5. Oblicz prawdopodobieństwo $P(X < EX^2 \mid X > VarX)$.

2. X - rozkład wykładniczy

$EX = \frac{2}{5}$

$P(X < EX^2 \mid X > VarX) = ?$

w rozkładzie wykł. $EX = \frac{1}{\lambda}$

$\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{5} \rightarrow \lambda = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$P(X < EX^2 \mid X > VarX) = \left\{ \text{na podstawie def. prawdop. warunkowego } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right\} =$

$= \frac{P(VarX < X < EX^2)}{P(X > VarX)}$

dla rozkładu wykł. $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$VarX = \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{25}{4}} = \frac{4}{25}$$

Na podstawie własności wartości oczekiwanej i wariancji:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$VarX = EX^2 - (EX)^2 \quad /+(EX)^2$$

$$EX^2 = VarX + (EX)^2$$

$$EX^2 = \frac{4}{25} + \frac{4}{25}$$

$$EX^2 = \frac{8}{25}$$

gęstość f dla rozkładu wykł.:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ \lambda e^{-\lambda t} & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$$

stąd:

$$\frac{P(VarX < X < EX^2)}{P(X > VarX)} = \frac{P\left(\frac{4}{25} < X < \frac{8}{25}\right)}{P\left(X > \frac{4}{25}\right)}$$

z definicji zmiennej losowej ciągłej:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \quad \text{oraz} \quad P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$

$$P\left(\frac{4}{25} < X < \frac{8}{25}\right) = \int_{\frac{4}{25}}^{\frac{8}{25}} \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_{\frac{4}{25}}^{\frac{8}{25}} \frac{5}{2} e^{-\frac{5}{2}t} dt =$$

$$= -e^{-\frac{5}{2}t} \Big|_{\frac{4}{25}}^{\frac{8}{25}} = -e^{-\frac{5}{2}\cdot\frac{8}{25}} + e^{-\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{25}} = e^{-\frac{2}{5}} - e^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{e^{\frac{2}{5}}} - \frac{1}{e^{\frac{4}{5}}} \approx 0{,}22$$

z def. dystrybuanty: $F(x) = P(X \leq x)$, przy czym dla rozkł. ciągłego $P(X=x) = 0$ (z własności całki ozn.), więc $F(x) = P(X<x)$

$$F\left(\frac{4}{25}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{4}{25}} f(s)ds = \int_0^{\frac{4}{25}} \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\frac{4}{25}} \frac{5}{2} e^{-\frac{5}{2}t} dt = -e^{-\frac{5}{2}t} \Big|_0^{\frac{4}{25}} \approx 0{,}33$$

Po podstawieniu otrzymanych wartości:

$$\frac{P\left(\frac{4}{25} < X < \frac{8}{25}\right)}{P\left(X > \frac{4}{25}\right)} \approx \frac{0{,}22}{0{,}33} = \frac{2}{3}$$

Odp. $P(X < EX^2 \mid X > VarX) \approx \frac{2}{3}$.

Zadanie 3.

Niech zmienną losową o X ma rozkład normalny o wartości średniej 6 oraz wariancji 4. Znajdź punkt a taki, że $P(X > a) = 0.4$

3. $X \sim N(\mu, \sigma)$

$\mu = 6$

$\sigma^2 = 4 \rightarrow \sigma = 2$

$P(X > a) = 0,4$

$a = ?$

$P(X > a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a)$ - z def. zmiennej losowej ciągłej i dystrybuanty oraz własności prawdopodobieństwa

$1 - F(a) = 0,4 \rightarrow F(a) = 0,6$

Należy dokonać standaryzacji zmiennej losowej X

z - standaryzowana zmienna losowa

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-6}{2}$$

$$P\left(\frac{X-6}{2} > \frac{a-6}{2}\right) = 0,4 = P\left(Z > \frac{a-6}{2}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{a-6}{2}\right) = 0,4$$

$$P\left(Z < \frac{a-6}{2}\right) = 0,6$$

po odczytaniu z tablic statystycznych dla jakiej wartości $\left(\frac{a-6}{2}\right)$ dystrybuanta zmiennej losowej standaryzowanej przyjmuje wartość 0,6 otrzymuję:

dla $x = 0,25$ $\Phi(x) = 0,5987 \approx 0,6$

stąd $\frac{a-6}{2} = x = 0,25 \quad / \cdot 2$

$a - 6 = 0,5 \quad / +6$

$a = 6,5$

$\boxed{\text{Odp. } a = 6,5}$

wykonał
Sławomir Jabłoński,
s14736