Wykład XII

Zadanie 1.

W badaniu porównano wiek mężczyzn i kobiet zawierających związek małżeński. W tym celu wzięto pod uwagę 400 par małżeńskich, dla których otrzymano średni wiek mężczyzny 28, a kobiety 25, przy wariancjach odpowiedni 9 i 16. Czy na poziomie istotności 0.05 można twierdzić, że średni wiek mężczyzny jest większy od średniego wieku kobiety?

1. $\alpha = 0{,}05$

$n = 400$

$X_1, X_2, \ldots X_{400}$ i $Y_1, Y_2, \ldots Y_{400}$ - niezależne proste próby losowe

$\bar{x} = 28$

$s_x^2 = 9$

$\bar{y} = 25$

$s_y^2 = 16$

$H_0: \mu_x = \mu_y$

$H_1: \mu_x > \mu_y$

$n \geq 30$ - korzystam ze statystyki testowej:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2 + S_y^2}{n}}}$$

wartość statystyki testowej: $z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2 + s_y^2}{n}}} = \frac{28-25}{\sqrt{\frac{25+9}{400}}} = \frac{3}{\sqrt{0{,}09}} = 10$

przy spełnieniu H_0 $Z \sim N(0,1)$

zbiór krytyczny: $C = \{z : z \geq z_{1-\alpha}\}$

$z_{1-\alpha} = z_{0{,}95} = 1{,}64$

$z = 10 \geq 1{,}64 = z_{0{,}95}$ - na tej podstawie odrzucamy H_0 i przyjmujemy H_1

Odp. Na poz. istotności $\alpha = 0{,}05$ twierdzimy, że średni wiek mężczyzny jest istotnie większy od średniego wieku kobiety.

Zadanie 2.

W celu stwierdzenia, czy zamieszkanie maturzystów w dużych miastach wpływa na poziom IQ w porównaniu z rówieśnikami z mniejszych miejscowości pobrano próbę 60 maturzystów mieszkających w dużych miejscowościach i 50 mieszkających w małych miejscowościach. Średni poziom IQ wynosił odpowiednio 99 i 96 w obu próbach, natomiast odchylania odpowiednio 7 i 10. Rozkłady poziomu ołowiu w obu grupach są normalne. Przyjąć poziom istotności 0,05.

2. $n_1 = 60$

$n_2 = 50$

$\bar{x} = 99$

$\bar{y} = 96$

$S_1 = 7$

$S_2 = 10$

$\alpha = 0{,}05$

$X_1, \ldots X_{60}$ i $Y_1, \ldots Y_{50}$ - niezależne próby losowe z rozkładów $N(\mu_1, \sigma_1)$ i $N(\mu_2, \sigma_2)$

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Statystyka testowa: ($n_1, n_2 \geqslant 30$, można więc jej użyć)

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

wartość statystyki testowej:

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} = \frac{99 - 96}{\sqrt{\frac{49}{60} + \frac{100}{50}}} \approx 1{,}79$$

zbiór krytyczny: $C = \{ z : |z| \geqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}} \}$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} = 1{,}96$

$|z| = |1{,}79| = 1{,}79 < 1{,}96$ - z nie należy do zbioru krytycznego, podtrzymujemy H_0.

Odp. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ brak podstaw do przyjęcia tezy, że IQ zależy od wielkości miejscowości.

Zadanie 3.

Zmierzono czas reakcji na pewien bodziec u 8 kierowców badanych w pracowni psychotechnicznej przed i w 15 min. po wypiciu 100g wódki. Wyniki (w sek.) były następujące

„przed”	0,22	0,18	0,16	0,19	0,20	0,23	0,17	0,25
„po”	0,28	0,25	0,20	0,30	0,19	0,26	0,28	0,24

Na poziomie istotności 0,01 zweryfikować hipotezę, że wódka wydłuża czas reakcji na bodziec. Zastosować test dla jednej próby różnic wyników u tego samego kierowcy przy założeniu, że mają one rozkład normalny o odchyleniu 0,05 .

3. $n=8$

$\alpha=0{,}01$

$(X_1,Y_1),\ldots(X_8,Y_8)$ - prosta próba losowa z rozkładu dwuwymiarowego normalnego.

$D_i=X_i-Y_i \rightarrow$ prosta próba losowa o rozkładzie $N(\mu_D;0{,}05)$

$S_D=0{,}05$

$H_0: \mu_D=\mu_1-\mu_2=0$

$H_1: \mu_D<0 \Leftrightarrow \mu_1-\mu_2<0 \Leftrightarrow \mu_1<\mu_2$

Statystyka testowa:

$$T=\frac{\overline{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$$ jeśli H_0 prawdziwe to $T\sim t_{n-1}$

zbiór krytyczny: $C=\{t: t\le t_{\alpha,n-1}\}$

$t_{\alpha,n-1}=t_{0{,}01;7}=2{,}99$

wartość statystyki testowej:

$d_i = -0{,}06;\ -0{,}07;\ -0{,}04;\ -0{,}11;\ 0{,}01;\ -0{,}03;\ -0{,}11;\ 0{,}01$

$\overline{d}=-0{,}05$

$$t=\frac{-0{,}05}{\frac{0{,}05}{8}}=8$$

$t=8>2{,}99=t_{0{,}01;7}$ - pozostawiamy H_0.

Odp. Brak podstaw do stwierdzenia na $\alpha=0{,}01$, że wódka wydłuża czas reakcji kierowcy.

Zadanie 4.

Czy można stwierdzić, że w transporcie psuje się 10% warzyw, jeżeli na 400 przebadanych warzyw było 50 zepsutych. Przyjąć poziom istotności 0,1.

4. $\alpha = 0{,}1$

$n = 400$ - liczność próby

$p_0 = 0{,}1$

$H_0: p = 10\% = 0{,}1 = p_0$

$H_1: p \neq 0{,}1 = p_0$

Statystyka testowa na podstawie CTG:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}, \text{ gdzie } \hat{p} = \frac{50}{400} = \frac{1}{8} \text{ - częstość}$$

wartość statystyki:

$$z = \frac{0{,}125 - 0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{500}}} = \frac{0{,}025}{\sqrt{\frac{0{,}09}{500}}} = \frac{0{,}025}{\sqrt{0{,}00018}} \approx 1{,}92$$

zbiór krytyczny:

$$C = \{z: |z| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}95$$

$$z_{0{,}95} = 1{,}64$$

$$P(|Z| \geq 1{,}92) = P(Z \geq 1{,}92) + P(Z \leq -1{,}92) =$$

$$= P(Z \leq -1{,}92) + 1 - P(Z \leq 1{,}92) = 1 - P(Z \leq 1{,}92) + 1 - P(Z \leq 1{,}92) =$$

$$= 2 - 2P(Z \leq 1{,}92) = 2 - 2\Phi(1{,}92) = 0{,}06$$

$|z| = 1{,}92 \geq 1{,}64$ - spełniony został warunek zbioru krytycznego, odrzucamy więc H_0 na korzyść H_1

Odp. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ odrzucamy hipotezę, że psuje się 10% transportowanych warzyw.

wykonał
Sławomir Jabłoński,
s14736