Zadanie 1.

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 > \mu_2$

Poziom istotności $\alpha = 0{,}05$

Obie próby są liczne, brak informacji o rozkładzie. Do weryfikacji hipotezy zerowej stosujemy statystykę:

$$Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

która – przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 – ma rozkład normalny N(0; 1).

U nas:

$n_1 = 400$ $\quad\quad$ $n_2 = 400$

$\bar{x} = 28$ $\quad\quad$ $\bar{y} = 25$

$s_1^2 = 9$ $\quad\quad$ $s_2^2 = 16$

A zatem: $Z = 12$

Zbiorem krytycznym – wobec przyjętej postaci hipotezy alternatywnej jest przedział:

$$C = \{z : z \geq z_{1-\alpha}\} = \langle z_{1-\alpha}; +\infty)$$

$z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1{,}6449$

Wobec tego:

$$C = \langle 1{,}6449; +\infty)$$

Jak widać:

$$Z \in C$$

Na poziomie istotności 0,05 odrzucamy hipotezę zerową na korzyść alternatywnej. Wyniki uzyskane na podstawie próby pozwalają twierdzić, że przeciętny wiek mężczyzny zawierającego związek małżeński jest większy od jego małżonki.

Zadanie 2.

H$_0$: $\mu_1 = \mu_2$

H$_1$: $\mu_1 \neq \mu_2$

Poziom istotności α = 0,05

W tym przypadku nieznamy odchyleń standardowych w obu populacjach. Statystyka testowa wyraża się wzorem:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}.$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 statystyka ta ma rozkład t-Studenta o (n_1+n$_2$-2) stopniach swobody.

U nas:

n_1 = 60 $\quad$ n_2 = 50

$\bar{x} = 99$ $\quad$ $\bar{y} = 96$

S_1 = 7 $\quad$ S_2 = 10

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}. \quad => \ S_p = 8.493462$$

Obliczamy: $\quad T = 1.844594$

Zbiorem krytycznym – wobec przyjętej postaci hipotezy alternatywnej jest przedział:

$$C = \left(-\infty; -t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \right] \cup \left[t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty \right)$$

$t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} = t^{108}_{10,975} \approx z_{0,975} = 1.96$

Jak widać:

$$Z \in C$$

Na poziomie istotności 0,01 odrzucamy hipotezę zerową na korzyść alternatywnej. Wyniki uzyskane na podstawie próby pozwalają twierdzić, że średni poziom ołowiu we krwi osób (kobiet) mieszkających przy trasach szybkiego ruchu jest wyższe niż u osób (kobiet) mieszkających z dala od takich tras.

Zadanie 3.

H_0: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 = 0$

H_1: $\mu_D = \mu_1 - \mu_2 < 0$

Poziom istotności α = 0,01

W zadaniu mamy do czynienia z próbami zależnymi. Zadanie jest więc tożsame z weryfikacją hipotezy o wartości oczekiwanej jednaj zmiennej $d_i = x_i - y_i$. Próba pochodzi z populacji o rozkładzie normalnym i znanym odchyleniu standardowym, a zatem do weryfikacji hipotezy wykorzystamy statystykę:

$$Z = \frac{\bar{d}}{\sigma_D} \cdot \sqrt{n}$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 statystyka ta ma rozkład normalny N(0,1).

Obliczamy zatem średnią arytmetyczną zmiennej d_i.

x_i	0,22	0,18	0,16	0,19	0,20	0,23	0,17	0,25
y_i	0,28	0,25	0,20	0,30	0,19	0,26	0,28	0,24
$\boldsymbol{d_i}$	-0,06	-0,07	-0,04	-0,11	0,01	-0,03	-0,11	0,01

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i = -0{,}05$$

$$T = \frac{-0{,}05}{0{,}05} \cdot \sqrt{8} = -2{,}8284$$

Zbiorem krytycznym – wobec przyjętej postaci hipotezy alternatywnej jest przedział:

$$C = \left(-\infty; -z_{1-\alpha}\right]$$

gdzie $z_{1-\alpha} = z_{0,99} = 2{,}3263$

Zatem:

$$T \in C$$

Na poziomie istotności 0,01 odrzucamy hipotezę zerową. Wyniki uzyskane na podstawie próby pozwalają twierdzić, że wódka wydłuża czas reakcji.

Zadanie 4.

H_0: $p = 0{,}1$

H_1: $p \neq 0{,}1$

Poziom istotności $\alpha = 0{,}1$.

Do weryfikacji użyjemy statystyki testowej:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy H_0 statystyka ta ma rozkład normalny N(0; 1).

U nas: $n = 400$

$$\hat{p} = \frac{50}{400} = 0{,}125$$

Zatem:

$$Z = \frac{0{,}125 - 0{,}1}{\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{400}}} = 1{,}(6)$$

Zbiorem krytycznym – wobec przyjętej postaci hipotezy alternatywnej jest przedział:

$$C = \left(-\infty; -z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right] \cup \left[z_{1-\frac{\alpha}{2}}; +\infty\right)$$

U nas $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,95} = 1{,}64485$

Wobec tego:

$$C = (-\infty; -1{,}64485] \cup [1{,}64485; +\infty)$$

Jak widać:

$$Z \in C$$

Na poziomie istotności 0,05 stwierdzamy odrzucamy hipotezę zerową.