# Matematyka dyskretna dla informatyków. Wykład 3,4,5 (3.11.2004) Wersja 1.1

# 1 Relacje

## 1.1 Podstawowe pojęcia

Pojęcie relacji jest jednym z najważniejszych w matematyce i informatyce. Formalnie *relacją n-argumentową* określoną w zbiorach $A_1 \times \cdots \times A_n$ nazwiemy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A_1 \times \cdots \times A_n$. Czyli określenie relacji polega na wybraniu z wszystkich możliwych n-tek $(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \cdots, a_n \in A_n$ takich, których zestawienie z jakiegoś powodu nas interesuje. Niech na przykład $A_1$ oznacza zbiór pasażerów w pewnej bazie danych, $A_2$ zbiór linii lotniczych w tej bazie, zaś $A_3$ — zbiór wszystkich połączeń lotniczych zarejestrowanych w tej bazie. Zbiór $A_1 \times A_2 \times A_3$ oznacza zestawienie wszystkich możliwości lotu każdego z pasażerów na każdej z tras każdą z linii. Elementami tego zbioru będą też trójki, które w rzeczywistości mogą nie odpowiadać stanowi faktycznemu choćby z tego powodu, że dana linia lotnicza na danej trasie może nie mieć żadnego lotu w rozkładzie. Nas będą interesowały rezerwacje, których pasażerowie dokonali w tej bazie danych. Możemy określić relację $R$ dokonanych rezerwacji w taki sposób, że $(a_1, a_2, a_3) \in R$ wtedy i tylko wtedy gdy pasażer $a_1$ dokonał rezerwacji lotu w liniach lotniczych $a_2$ na trasie $a_3$.

Zauważmy przy tym, że jeden pasażer może dokonać kilku rezerwacji na danej trasie w różnych liniach, że kilku różnych pasażerów może dokonać rezerwacji na tę samą trasę tą samą linią, że w końcu jeden pasażer może korzystać z usług jednej linii na kilku trasach. Wszystkie te sytuacje możemy wyrazić umieszczając odpowiednie zestawienia w relacji $R$. Nasza relacja jest jednak za słaba, żeby wyrazić np. fakt rezerwacji kilku różnych lotów tą samą linią na identycznej trasie przez tego samego pasażera (np. dzień po dniu). Gdybyśmy chcieli i tę wiadomość ująć w relacji opisującej rezerwacje, musielibyśmy wprowadzić dodatkowe zbiory opisujące konkretne loty i daty i określić nową relację, np. 5-argumentową, której elementem będzie piątka (pasażer, linia lotnicza, trasa, nr lotu, data).

Szczególnym rodzajem relacji są relacje dwuargumentowe. Stanowią one na tyle ważną klasę relacji, że będziemy opuszczali przymiotnik ,,dwuargumentowa" i mówiąc o relacjach bez dodatkowych określeń będziemy rozumieli właśnie relacje dwuargumentowe.

Jak zobaczyliśmy, zbiory połączone relacją mogą być bardzo różne. Czasami jednak zdarza się, że wszystkie składniki relacji, szczególnie dwuargumentowej, są identyczne. Relacja taka jest wtedy podzbiorem kwadratu kartezjańskiego $A \times A$ oznaczanego też przez $A^2$. Mówimy wtedy, że relacja jest określona *w zbiorze A*.

Przykładami takich relacji są:

- Relacja niemniejszości określona w zbiorze liczb naturalnych, czyli $\leq_{\mathbb{N}} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \exists k \in \mathbb{N} : a + k = b\}$.
- Relacja niemniejszości określona w zbiorze liczb rzeczywistych, czyli $\leq_{\mathrm{R}} = \{(a, b) \in \mathrm{R}^2 \exists c \in \mathrm{R} : a + c^2 = b\}$.

- Relacja przystawania modulo $n$ w zbiorze liczb naturalnych, czyli $\mathrm{mod}_n = \{\{(a,b) \in I\!N^2 \exists k,l,r \in I\!N : a = kn + r, b = ln + r\}$

Rzecz jasna nie są to jedyne możliwe sposoby definiowania tych skądinąd znanych relacji. Zwykle w przypadku relacji dwuargumentowych stosuje się notację infiksową pisząc np. zamiast $(2,5) \in \leq_{I\!N}$ po prostu $2 \leq_{I\!N} 5$ lub wręcz $2 \leq 5$, gdy jasne jest w jakiej dziedzinie (w tym przypadku — naturalnej) relacja $\leq$ została określona.

*Dziedziną* relacji nazwiemy zbiór tych elementów, które występują jako pierwszy składnik par wchodzących w jej skład, a *przeciwdziedziną* — zbiór tych elementów, które występują jako drugi składnik par wchodzących w jej skład. Przykładowo dziedziną relacji ostrej większości określonej na liczbach naturalnych jest zbiór $I\!N \setminus \{0\}$, zaś przeciwdziedziną zbiór $I\!N$. *Relacja pusta*, to po prostu zbiór pusty, a *relacja pełna*, to zbiór $A \times A = A^2$. Żadne dwa elementy nie są ze sobą w relacji pustej; każde dwa elementy są ze sobą w relacji pełnej.

*Relacją odwrotną* do relacji $R \subseteq A \times B$ nazwiemy relację $R^{-1}$ określoną w $B \times A$ w następujący sposób: $(b,a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a,b) \in R$. Zauważmy, że $(R^{-1})^{-1} = R$.

Dla dwóch relacji binarnych $R_1 \subseteq A_1 \times A_2$ oraz $R_2 \subseteq A_2 \times A_3$ określamy ich *złożenie* jako relację $R \subseteq A_1 \times A_3$ w następujący sposób: $(a_1, a_3) \in R \Leftrightarrow \exists a_2 \in A_2 : (a_1, a_2) \in R_1, (a_2, a_3) \in R_2$. Najczęściej mamy do czynienia z sytuacją, gdy $A_1 = A_2 = A_3$, czyli gdy wszystkie relacje są określone w tym samym zbiorze. Wtedy interpretując relacje w postaci strzałek łączących elementy zbioru musimy rozróżnić (na przykład kolorem) te pary punktów, które są połączone relacją $R_1$ (powiedzmy strzałki czerwone) oraz te. które są połączone relacją $R_2$ (powiedzmy strzałki zielone). Wtedy złożenie $R_1$ i $R_2$ będzie relacją, która łączy ze sobą te elementy, które są połączone dwiema kolejnymi strzałkami: najpierw czerwoną, a potem zieloną. Ustalmy też notację dla relacji złożonej ze sobą kilka razy. Przyjmijmy, że $R^0 = \mathrm{id}$ oraz $R^{n+1} = R \cdot R^n$ dla $n \geq 0$.

Pewna klasa relacji odgrywa ogromne znaczenie w matematyce. Niektóre relacje $R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n$ mają tę cechę, że gdy ustalimy elementy $a_1, \ldots, a_{n-1}$, wówczas tylko co najwyżej jeden element $a_n$ będzie z nimi w relacji, czyli spełniony jest ogólny warunek: $\forall a_1 \in A_1, \ldots, a_{n-1} \in A_{n-1} (\exists a_n, a'_n \in A_n : (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \in R \wedge (a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_n) \in R \Rightarrow a_n = a'_n$. Innymi słowy jeśli dwa elementy $a_n$ oraz $a'_n$ są w relacji $R$ z elementami $a_1, \ldots, a_{n-1}$, to muszą być sobie równe. Dokładniej: jeżeli ustalimy elementy $a_1, \ldots, a_{n-1}$, to są dwie możliwości: albo nie będzie żadnego elementu wchodzącego z nimi w relację (implikacja występująca w definicji jest w sposób trywialny prawdziwa, jako że poprzednik implikacji jest fałszywy), albo będzie tylko jeden taki element. Relację $R$, która spełnia powyższy warunek nazywamy *funkcją częściową*, albo, krócej, *funkcją*. Jeżeli dodatkowo dla każdych $a_1, \ldots, a_{n-1}$ istnieje element $a_n$ (rzecz jasna jedyny) będący z nimi w relacji, to funkcja taka nazywa się *funkcją całkowitą*.

Zauważmy, że szkolne pojęcie funkcji odpowiada funkcji całkowitej, a pojęcia dziedziny funkcji, złożenia funkcji, odwracania funkcji, znane ze szkoły średniej są szczególnymi przypadkami powyższych określeń dla relacji. Zauważmy też, że choć dla każdej relacji istnieje relacja odwrotna, to nie dla każdej funkcji istnieje funkcja odwrotna. Relacja odwrotna do relacji, która jest funkcją, sama być funkcją nie musi. Na przykład relacja $\{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 = y\}$ jest funkcją, ale relacja odwrotna $\{(y,x) \in R^2 : x^2 = y\}$ już funkcją nie jest. Należą do niej choćby pary $(1,-1)$ oraz $(1,1)$.

**Przykład**

Rozważmy relację $\log_2$ określoną w zbiorze R w następujący sposób: $(x,y) \in \log_2 \Leftrightarrow x >$

$0 \wedge 2^y = x$. Dziedziną tej relacji jest zbiór wszystkich liczb dodatnich, przeciwdziedziną cały zbiór R. Relacja ta jest funkcją. Należą do niej przykładowo pary

$$(\frac{1}{1024}, -10), (\frac{1}{2}, -1), (1, 0), (2, 1), (1024, 10).$$

Jest to funkcja logarytmiczna. Standardowo piszemy np. zamiast $(2, 1) \in \log_2$ po prostu $\log_2(2) = 1$ lub wręcz $\log_2 2 = 1$. Relacja odwrotna do $\log_2$ jest także funkcją. Jej dziedziną jest zbiór R, a przeciwdziedziną zbiór $\mathrm{R}_+$. Składa się ona m.in. z par

$$(-10, \frac{1}{1024}), (-1, \frac{1}{2}), (0, 1), (1, 2), (10, 1024).$$

Jest to funkcja wykładnicza. Złożenie relacji $\log_2$ oraz relacji odwrotnej $\log_2^{-1}$ jest także funkcją. Jest to funkcja identycznościowa na zbiorze $\mathrm{R}_+$ (czyli zbiór par $(x, x)$ takich że $x \in \mathrm{R}_+$). Z kolei złożenie relacji (funkcji) $\log_2^{-1}$ oraz relacji (funkcji) do niej odwrotnej, czyli $\log_2$ także jest funkcją, ale nieco inną. Też jest to funkcja identycznościowa, ale na całym zbiorze R.

Niektóre cechy relacji są szczególnie ważne. Przedstawimy teraz podstawowe rodzaje relacji. Niech $R \subseteq X \times X$ dla pewnego ustalonego zbioru $X$.

- $R$ jest *zwrotna* $\Leftrightarrow \forall a \in X : (a, a) \in R$.
- $R$ jest *przeciwzwrotna* $\Leftrightarrow \forall a \in X : (a, a) \notin R$.
- $R$ jest *symetryczna* $\Leftrightarrow \forall a, b \in X : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.
- $R$ jest *asymetryczna* $\Leftrightarrow \forall a, b \in X : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$.
- $R$ jest *antysymetryczna* $\Leftrightarrow \forall a, b \in X : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$.
- $R$ jest *przechodnia* $\Leftrightarrow \forall a, b, c \in X : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.
- $R$ jest *spójna* $\Leftrightarrow \forall a, b \in X : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R \vee a = b$.

Łańcuchem w zbiorze $A$ relacji $R$ nazwiemy ciąg $a_1, a_2, a_3, ...$ taki, że każde dwa kolejne elementy są ze sobą w relacji, czyli $(a_1, a_2) \in R$, $(a_2, a_3) \in R, \ldots$ Łańcuch może być skończony lub nieskończony. Relacja $R$ jest *dobrze ufundowana*, jeśli każdy jej łańcuch jest skończony.

Ważnym pojęciem jest też *domknięcie relacji* ze względu na pewną cechę, czyli jej uzupełnienie o minimalną liczbę elementów tak, aby zapewnić zachodzenie tej cechy. Zwłaszcza istotne są domknięcia przechodnie, a także symetryczne i zwrotne. Zacznijmy może od tego ostatniego. *Domknięciem zwrotnym* relacji $R$ nazwiemy relację $R \cup \mathrm{id}$. *Domknięcie symetryczne* relacji $R$, to relacja $R \cup R^{-1}$. *Domknięcie przechodnie* relacji $R$, to relacja, która składa się z wszystkich par $(a, b)$ takich, że $(a, b) \in R^n$ dla pewnego $n \geq 1$. Domknięcie przechodnie relacji $R$ będziemy oznaczali symbolem $R^+$, domknięcie zwrotne symbolem $R^z$, domknięcie symetryczne symbolem $R^s$, a domknięcie jednocześnie zwrotne i przechodnie symbolem $R^*$.

Jeżeli spojrzymy na relację $R$ graficznie jako na strzałki łączące ze sobą narysowane punkty, to jej domknięcie zwrotne odpowiada dorysowaniu brakujących pętelek (czyli strzałek prowadzących od każdego węzła do siebie samego) przy każdym punkcie, domknięcie symetryczne — uzupełnienie każdej strzałki o przeciwny kierunek, a domknięcie przechodnie — połączenie strzałką każdej pary punktów $(a, b)$ takiej, że z $a$ do $b$ można dojść po strzałkach relacji $R$.

Zauważmy w końcu, że relacje są zbiorami, więc można na nich wykonywać wszystkie działania teorii zbiorów, a więc sumowanie, iloczyn, różnicę, dopełnienie itd.

Przedstawimy teraz kolekcję relacji każdemu doskonale znanych z życia codziennego i spróbujemy zilustrować wprowadzone pojęcia. Załóżmy, że rozważamy relacje rodzinne w zbiorze ludzi znajdujących się obecnie na ziemi (można też dorzucić do tego zbioru parę minionych pokoleń). W tym zbiorze określone są naturalne relacje MATKA i OJCIEC. Powiemy, że $(x, y) \in$ MATKA jeśli $y$ jest matką $x$, zaś $(x, y) \in$ OJCIEC jeśli $y$ jest ojcem $x$. Załóżmy też istnienie jednoargumentowych relacji ON i ONA mówiących o tym, czy ktoś jest mężczyzną czy kobietą. Zatem $x \in$ ONA, albo, krócej, ONA$(x)$, gdy $x$ jest kobietą i analogicznie dla mężczyzn. Z przyczyn technicznych warto też zdefiniować relacje ONI $= \{(x, x) : \mathrm{ON}(x)\}$ oraz ONE $= \{(x, x) : \mathrm{ONA}(x)\}$. Relacje ONI i ONE są podzbiorami relacji id. Dowolna relacja złożona z relacją ONI (ONE) pozostawi tylko te elementy, które na drugiej współrzędnej mają mężczyzn (kobiety). Podobnie, relacja ONI (ONE) złożona z dowolną relacją pozostawi z niej tylko te pary, które mają na pierwszej współrzędnej mężczyzn (kobiety). Podstawowymi relacjami będą też relacje MĄŻ $= \{(x, y) : y \text{ jest mężem } x\}$ i ŻONA $=$ MĄŻ$^{-1}$.

Będą to nasze relacje bazowe i z nich wyprowadzimy znane skądinąd dalsze relacje rodzinne.

- Relacja „$x$ jest rodzicem $y$” to po prostu relacja RODZIC $=$ MATKA $\cup$ OJCIEC
- Relacja „$b$ jest bratem $a$”, to relacja BRAT $= \{(a, b) : a \neq b \wedge \mathrm{ON}(b) \wedge \exists m, o : \mathrm{MATKA}(a, m), \mathrm{MATKA}(b, m), \mathrm{OJCIEC}(a, o), \mathrm{OJCIEC}(b, o)\}$. Zauważmy, że relacja $((\mathrm{MATKA} \cdot \mathrm{MATKA}^{-1}) \cap (\mathrm{OJCIEC} \cdot \mathrm{OJCIEC}^{-1}) \setminus \mathrm{id}) \cdot \mathrm{ONI}$ jest dokładnie relacją BRAT.
- SIOSTRA $= ((\mathrm{MATKA} \cdot \mathrm{MATKA}^{-1}) \cap (\mathrm{OJCIEC} \cdot \mathrm{OJCIEC}^{-1}) \setminus \mathrm{id})\mathrm{ONE}$
- Relacja CAŁE RODZEŃSTWO $= (\mathrm{MATKA} \cup \mathrm{OJCIEC})(\mathrm{MATKA} \cup \mathrm{OJCIEC})^{-1} \setminus \mathrm{id}$ definiuje rodzeństwo zarówno naturalne, jak i przyrodnie.
- Relacja OJCIEC $\cdot$ BRAT to STRYJ.
- Spróbujmy zdefiniować relację WUJ. Jest to niewątpliwie brat matki, a więc możemy go zdefiniować jako MATKA $\cdot$ BRAT (najpierw idziemy po strzałce do matki, a potem do jej brata). Wujem też nazywa się męża ciotki. Zatem kim jest ciotka? Ciotka, to siostra matki lub ojca, więc CIOTKA $=$ RODZICSIOSTRA. Uwaga: zgodnie z polską tradycją żona wuja to wujenka, a nie ciotka. Inaczej mielibyśmy małe kłopoty: do zdefiniowania wuja byłaby potrzebna ciotka (jako jego żona), a do zdefiniowania ciotki — wuj (jako jej mąż). Groziłoby to zapętleniem się. Ostatecznie jednak WUJ $=$ MATKA $\cdot$ BRAT $\cup$ CIOTKA $\cdot$ MĄŻ.
- Dziadek, to rodzic do kwadratu płci męskiej: DZIADEK $=$ RODZIC$^2$ONI, a babcia to BABCIA $=$ RODZIC$^2$ONE. Można też inaczej: DZIADEK $=$ RODZIC $\cdot$ OJCIEC, a BABCIA $=$ RODZIC $\cdot$ MATKA.

- $\mathrm{WNUCZĘ} = (\mathrm{DZIADEK} \cup \mathrm{BABCIA})^{-1}$, zaś $\mathrm{WNUK} = \mathrm{WNUCZĘ} \cdot \mathrm{ONI}$.

- $\mathrm{PRZODEK} = \mathrm{RODZIC}^{+}, \mathrm{POTOMEK} = \mathrm{PRZODEK}^{-1}$.

- $\mathrm{KREWNY} = \mathrm{PRZODEK}^{z} \cdot \mathrm{POTOMEK}^{z}$. Ktoś jest zatem moim krewnym, jeśli znajdę takiego swojego przodka, którego on jest potomkiem.

Podamy teraz definicję *grafu relacji*, która zostanie później uogólniona. Grafem relacji $R$ określonej w zbiorze $A$ nazwiemy parę $(A, R)$. Zbiór $A$ nazywamy zbiorem *węzłów* lub *wierzchołków* grafu, a zbiór $R$ — zbiorem jego *krawędzi*. Grafy będziemy reprezentowali graficznie w postaci rysunków, w których węzły są punktami, a elementy relacji — strzałkami.

Ścieżką długości $n$ w grafie relacji $(A, R)$ nazwiemy ciąg $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$, gdzie dla każdego $i = 1, \dots, n : e_i = (v_{i-1}, v_i)$. Ścieżką jest zatem ciąg kolejnych węzłów i krawędzi prowadzących od $v_0$ do $v_n$. Jeżeli $v_0 = v_n$, to ścieżkę nazywamy *cyklem*. Jeśli dodatkowo żaden pozostałych z węzłów się nie powtarza, to taki cykl nazywamy *prostym*.

Graf nazwiemy *pełnym*, jeśli $R = A^2$, czyli gdy jest grafem relacji pełnej: każde dwa elementy $A$ są wtedy ze sobą w relacji. Graf relacji symetrycznej będziemy nazywali *niezorientowanym* i strzałki odpowiadające relacjom będziemy rysować w postaci odcinków zakładając, że każdy (niezorientowany) odcinek reprezentuje dwie strzałki: po jednej dla każdego kierunku.

## 1.2 Relacje równoważności i podziały

*Relacją równoważności* jest każda relacja jednocześnie zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Przykłady relacji równoważności:

- Relacja równości elementów dowolnego zbioru (identyczność) jest relacją równoważności.

- Relacja osiągalności w grafie relacji zwrotnej i symetrycznej, którą definiujemy tak: $b$ jest osiągalne z $a$, jeśli istnieje ścieżka prowadząca w tym grafie od $a$ do $b$.

- Relacja RODZEŃSTWO, która obejmuje te pary, które mają identycznych rodziców.

- Relacja $\mathrm{mod}_n$ przystawania modulo $n$ dla $n > 0$ w zbiorze liczb naturalnych: $(a, b) \in \mathrm{mod}_n \Leftrightarrow a \mathrm{mod} n = b \mathrm{mod} n$.

- Relacja należenia do tej samej grupy ćwiczeniowej z PRG.

Nie są natomiast relacjami równoważności następujące relacje:

- Relacja pokrewieństwa KREWNY. (brak przechodniości!)

- Relacja BRAT(ani zwrotna ani symetryczna ani przechodnia!)

- Relacja należenia do tej samej grupy ćwiczeniowej z czegokolwiek w PJWSTK.

*Klasą abstrakcji* elementu $a \in A$ relacji równoważności $R$ nazwiemy zbiór $\{b : (a, b) \in R\}$. Klasę abstrakcji elementu $a$ oznaczamy przez $[a]$. Zbiór klas abstrakcji relacji $R$ oznaczamy przez $A/R$ i nazywamy zbiorem ilorazowym. *Podziałem* zbioru $A$ nazwiemy rodzinę jego podzbiorów $A_1, \ldots, A_k$ taką, że spełnione są dwa warunki:

- $A_1 \cup \cdots \cup A_k = A$
- $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$.

Czyli podziałem zbioru $A$ nazywamy każdy zbiór rozłącznych parami podzbiorów zbioru $A$, które w sumie dają cały zbiór $A$. *Zasada abstrakcji* głosi, że między podziałami zbioru, a relacjami równoważności istnieje wzajemna odpowiedniość. Każda relacja równoważności wyznacza pewien podział, a każdy podział definiuje unikalną relację równoważności: taką, że para elementów jest ze sobą w tej relacji, gdy oba elementu znajdują się w jednym podzbiorze.

Przykłady:

- Relacja osiągalności definiuje podział zbioru $A$ na regiony połączone ze sobą ścieżkami w grafie relacji. W szczególności gdybyśmy rozważali graf połączeń drogowych na kuli ziemskiej, to zapewne jedną klasę abstrakcji stanowiłyby wszystkie kontynentalne węzły azjatyckie, europejskie i afrykańskie, kolejną węzły obu Ameryk, kolejną — węzły australijskie, dalej osobno węzły brytyjskie, islandzkie itd. Ogólnie każda wyspa stanowiłaby swoją klasę abstrakcji.
- Relacja RODZEŃSTWO utożsamia dzieci tych samych rodziców. Z pewnych względów rozróżnianie między nimi może być nieistotne: na przykład gdy rodzic dostaje zaproszenie na jakąś imprezę dla siebie i jednego dziecka, to nie ważne, które ze swoich dzieci ze sobą zabierze. Mówiąc w języku potocznym „jedno dziecko" mamy w takim przypadku na myśli reprezentanta odpowiedniej klasy abstrakcji relacji RODZEŃSTWO.
- Relacja $\mathrm{mod}_n$ dzieli zbiór liczb naturalnych na $n$ klas abstrakcji. Do pierwszej z nich należą te wszystkie liczby, które przy dzieleniu przez $n$ dają resztę 0, do drugiej — te, które dają resztę 1, ..., do $n$-tej te, które dają resztę $n - 1$.

Praktyka pokazuje, że przy analizie systemów należy abstrahować od nieistotnych szczegółów ustalając możliwie dużą relację równoważności, która pozwoli skoncentrować się na istotych różnicach. Zbiór ilorazowy takiej relacji jest z reguły prostszy i przez to łatwiejszy do implementacji. Ustalenie odpowiedzniej relacji równoważności jest jednym z podstawowych narzędzi informatyka porządkującego badany przez siebie świat.

## 1.3 Relacje porządku

Inną ważną klasą relacji są relacje porządkujące zbiór. Ze szkoły znamy najprostsze takie relacje: porządki liczbowe. Zbiory liczb naturalnych, wymiernych i rzeczywistych są uporządkowane relacją niemniejszości. Uogólnimy teraz to pojęcie.

Relacja $R$ określona na zbiorze $A$ jest *relacją porządku częściowego* lub, krócej, *relacją porządku*, wtedy i tylko wtedy gdy jest

- zwrotna
- antysymetryczna
- przechodnia.

Zauważmy, że relacje $\leq$ porządkujące zbiory liczbowe spełniają wszystkie te własności. Zauważmy, że nie ma założenia o spójności relacji porządku częściowego. Może się zdarzyć, że relacja porządku nie jest w stanie uporządkować dwóch różnych elementów. Oznacza to, że może się zdarzyć sytuacja, w której nie można stwierdzić ani że $(a, b) \in R$, ani że $(b, a) \in R$. Natomiast gdy relacja porządku częściowego jest dodatkowo spójna (czyli między każdymi dwoma elemenatmi można określić, który z nich jest większy lub równy), to taką relację nazwiemy *relacją porządku liniowego.*

Przykłady.

- Relacja $\leq_{\mathbb{N}}$ porządkująca punkty przestrzeni $\mathbb{N}^n$, czyli wektory liczb naturalnych. Powiemy, że $(a_1, \ldots, a_n) \leq (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow a_1 \leq b_1 \wedge \cdots \wedge a_n \leq b_n$.
- Relacja porządku leksykograficznego, stosowana w słownikach. Na zbiorach słów nad danym skończonym alfabetem definiujemy porządek w następujący sposób. Po pierwsze określamy porządek liter w alfabecie. Następnie mając dwa słowa ustalamy, że interesuje nas pierwsza od lewej różniąca je litera. Mniejsze będzie to słowo, którego taka pierwsza od lewej rózniąca je litera jest mniejsza w sensie porządku alfabetycznego od swojej odpowiedniczki w drugim słowie. Jeżeli takiej litery nie ma, to jedno z rozważanych słów musi być początkiem drugiego. Wtedy to z nich, które jest krótsze jest mniejsze. Jeśli oba są dodatkowo tej samej długości, to są one równe.
- Porządkujemy punkty płaszczyzny w układzie kartezjańskim następująco: $(x_1, y_1) \leq_K (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < x_2) \vee (x_1 = x_2) \wedge (y_1 \leq y_2)$. Zdefiniowany porządek nazywamy *leksykograficznym porządkiem kartezjańskim.*
- Porządkujemy punkty płaszczyzny następująco: każdemu punktowi przypisujemy parę liczb: $(r, \varphi)$. Zakładamy przy tym, że $r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Interpretujemy $r$ jako odległość od środka układu współrzednych $O$, zaś $\varphi$ jako miarę kąta między osią $OX$, a prostą łączącą początek układu współrzędnych z naszym punktem, o ile jest on różny od $O$. Umawiamy się dodatkowo, że punkt $O$ ma współrzędne $(0, 0)$.

  Reszta — tak jak poprzednio: $(r_1, \varphi_1) \leq_B (r_2, \varphi_2) \Leftrightarrow (r_1 < r_2) \vee (r_1 = r_2) \wedge (\varphi_1 \leq \varphi_2)$. Zdefiniowany porządek nazywamy *leksykograficznym porządkiem biegunowym.*
- Relacja inkluzji na zbiorze podzbiorów dowolnego zbioru.
- Relacja porządku na zbiorze funkcji rzeczywistych określonych na domkniętym odcinku $[a, b]$ zdefiniowana następująco: $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x)$.

Zauważmy, poza pierwszą i ostatnią z przykładowych relacji wszystkie przykładowe relacje są relacjami porządku całkowitego. Ostatnia relacja porządku na funkcjach jest relacją porządku częściowego: nie sposób np. stwierdzić, która z dwóch funkcji: $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = 1$ jest większa na przedziale $[0..2]$.

Porządki leksykograficzne stanowią z informatycznego punktu widzenia wyjątkowo ważną klasę porządków. Umożliwiają one określenie relacji porządku liniowego na iloczynach kartezjańskich (bazy danych!) gdy dane są porzadki liniowe na składnikach tego iloczynu.

Ważnymi pojęciami są też określenia elementów *największych* i *maksymalnych* (odpowiednio *najmniejszych* i *minimalnych*).

Niech $\leq_A$ będzie relacą porządku częściowego określonego w zbiorze $A$. Elementem największym (odp. najmniejszym) nazwiemy taki element $a \in A$, że dla każdego $b \in A$ zachodzi $b \leq_A a$ (odp. $a \leq_A b$). Elementem maksymalnym (odp. minimalnym) nazwiemy taki element $a \in A$, że nie istnieje różny od $a$ element $b \in A$ taki, że $a \leq_A b$ (odp. $b \leq_A a$).

**Przykład 1**: Rozważmy zbiór niezerowych wektorów o współrzędnych naturalnych oraz relację $\leq_{\mathbb{N}}$ porządku częściowego po współrzędnych (zdefiniowaną wcześniej w przykładach). W zbiorze tym istnieją trzy elementy minimalne: $[1, 0, 0], [0, 1, 0]$ oraz $[0, 0, 1]$. Nie ma w tym zbiorze elementu najmniejszego, ani maksymalnego (a tym bardziej największego). Gdybyśmy uzupełnili ten zbiór o wektor zerowy $[0, 0, 0]$, to stałby się on elementem najmniejszym tej relacji i jednocześnie jedynym minimalnym.

**Przykład 2**: Rozważmy domknięcie zwrotne relacji ,,bycia przodkiem" w drzewie genealogicznym ludzkości. Powiemy więc, że $x\mathrm{PRZODEK}^z y$, jeśli $x$ jest przodkiem $y$ lub $x = y$. Jest to relacja częściowego porządku (patrz ćwiczenia do tego rozdziału). Umówmy się, że $x\mathrm{PRZODEK}^z y$ będzie miało znaczenie $x \leq y$ (żeby określić kierunek strzałek). Elementy maksymalne tej relacji, to wszyscy ludzie, którzy nigdy nie mieli, lub nie mają dzieci. Elementy minimalne są dwa: Adam i Ewa.

Zauważmy, w każdej relacji porządku każdy element największy jest maksymalny (a najmniejszy — minimalny), ale nie na odwrót. W zbiorze może być co najwyżej jeden element największy (najmniejszy), a elementów maksymalnych może być więcej niż jeden.

Relacje porządkujące pełnią fundamentalną rolę w przygotowaniu danych do ich wykorzystania w algorytmach. Przede wszystkim chodzi tu o algorytm przeszukiwania binarnego, który omówimy dokładnie na programowaniu. Aby móc zastosować ten algorytm trzeba mieć relację porządku liniowego. Czasami taką relację wprowadza się całkowicie sztucznie (np. porządkuje się kolory, rodzaje materiału itp.) tylko po to, żeby wymusić odpowiedź na pytanie, który element jest większy lub równy.

Okazuje się też, co pokazał Szpilrajn, że każdą relację porządku częściowego można uzupełnić o takie elementy, aby stała się relacją porządku całkowitego. Algorytmy, które tego dokonują nazywają się algorytmami *sortowania topologicznego*.

## 1.4 Podobieństwa i pokrycia

Często spotykamy się z sytuacją, kiedy interesująca nas relacja mająca pogrupować elementy w grupy o zbliżonych właściwościach nie jest przechodnia. Przykładem takiej relacji jest relacja podobieństwa w rodzinie. Często zdarza się tak, że ojciec jest podobny do córki, córka do matki, a ojciec do matki — niekoniecznie. Mówi się co prawda, że to córka jest podobna do ojca, ale przyjmiemy tutaj, że relacja podobieństwa w rodzinie jest symetryczna.

Ogólnie *relacją podobieństwa* nazwiemy każdą relację zwrotną i symetryczną. Przykłady relacji podobieństwa:

- Relacja pokrewieństwa KREWNY. Matka jest krewną syna, syn krewnym ojca, ale matka na ogól krewną ojca nie jest.
- Relacja podobngo owłosienia głowy zdefiniowana tak, że podobne owłosienie mają takie dwie osoby, których liczba włosów na głowie różni się co najwyżej o jeden. Zwrotność i symetryczność tej relacji jest oczywista, a przechodniość nie zachodzi: gdyby tak było, to kompletnie łysy facet miałby owłosienie podobne do Claudii Schiffer.
- Wszystkie relacje równoważności (nie jest wcale zastrzeżone, że podobieństwo nie może być relacją przechodnią).

Dla danej relacji podobieństwa ważne jest określenie maksymalnych podzbiorów, w których ta relacja jest też przechodnia. W pewnym sensie możemy mówić wtedy o silnym podobieństwie ze względu na pewną cechę. Tyle tylko, że ta cecha nie musi być jednakowa dla wszystkich takich grup (tak było w przypadku relacji równoważności). Na przykład dla relacji pokrewieństwa takim podzbiorem może być zbiór krewnych danej osoby. Typem podobieństwa będzie w tym przypadku pokrewieństwo z tą właśnie osobą.

Niech zatem dla danej relacji podobieństwa $P$ *typem podobieństwa* będzie każdy maksymalny podzbiór elementów, w którym każde dwa są ze sobą w relacji $P$.

*Pokryciem* zbioru $A$ nazwiemy kążdą taką rodzinę jego podzbiorów $\{A_1, A_2 \ldots$, że $A_1 \cup A_2 \cup, \cdots = A$. Pokrycie $\mathcal{P}$ nazwiemy *właściwym*, jeśli żaden podzbiór $A_i \in \mathcal{P}$ nie jest podzbiorem żadnego $A_j \in \mathcal{P}$ dla $i \neq j$.

Okazuje się, że między relacjami podobieństwa, a pokryciami właściwymi każdego zbioru istnieje analogiczny związek, jak między relacjami równoważności, a podziałami. Jeżeli dane jest podobieństwo $P$, to zbiór typów tego podobieństwa stanowi jednoznacznie wyznaczone pokrycie. Jest to pokrycie właściwe. Na odwrót, jeśli dane jest pokrycie właściwe $\mathcal{P} = A_1, A_2, \ldots$ zbioru $A$, to relacja $P = \{(a, b)\} : \exists i : (a, b) \in A_i$ jest relacją podobieństwa.

Jeżeli relacja podobieństwa jest jednocześnie relacją równoważności, to pokrycie z nią związane jest podaziałem, a typy tej relacji podobieństwa są klasami abstrakcji.

**Zadania**

1. Zadania 1/140, 2/141,13,14/142,3,6,7,8,9,10/141 z „Matematyki dyskretnej".
2. Które ze zdefiniowanych własności spełniają relacje pusta i pełna?
3. Czy prawdziwe są następujące stwierdzenia
   - Jeśli relacja jest asymetryczna (odp. przeciwzwrotna), to nie jest symetryczna (odp. zwrotna)
   - Jeśli relacja jest symetryczna i przechodnia, to jest zwrotna
   - Domknięcie przechodnie relacji przechodniej jest jej równe
   - Wynik domknięcia relacji zwrotnego, symetrycznego i przechodniego zależy od kolejności dokonywania tych domknięć
   - Domknięcie zwrotne, symetryczne i przechodnie jest relacją pełną

4. Zdefiniuj w rachunku relacji wychodząc od relacji zdefinowanych w tekście następujące relacje rodzinne:

    - Stryjenka (żona stryja)
    - Jątrew (w tym stosunku rodzinnym są ze sobą żony braci)
    - Kuzyn (wspólni dziadkowie, ale nie rodzice)
    - Szwagier (mąż siostry albo brat żony lub męża).

5. Które z poniższych równości są prawdziwe:

    - DZIADEK = ONI $\cdot$ RODZIC$^2$?
    - SIOSTRA = RODZEŃSTWO $\cdot$ ONE?
    - BRAT $\cdot$ BRAT$^{-1}$ = BRAT$^{-1}$ $\cdot$ BRAT?

6. Dla każdej z relacji rodzinnych określ, czy jest ona zwrotna, symetryczna, przechodnia, antysymetryczna.

7. Pokaż, że relacja PRZODEK$^z$ jest relacją częściowego porządku.

8. Pokaż, że jeśli $R$ jest relacją częściowego porządku, to jest nią również relacja $R^{-1}$.

9. Która z liczb będzie pięćdziesiąta w relacji uporządkowania leksykograficznego liczb od 1 do 100 według zapisu

    - literowego po polsku (liczby zapisujemy tak: jeden, dwa, trzy.... Oczywiście tutaj np. dwa<jeden<trzy)?
    - cyfrowego w układzie dziesiętnym. (Uwaga: tu np. $11 < 2$)?
    - rzymskiego?

10. Uogólnij definicje porządków kartezjańskiego i biegunowego na przypadek trójwymiarowy.

11. Czy relacja $\leq_K \cap \leq_B$ jest relacją

    - porządku częściowego
    - porządku liniowego?

12. Czy relacja $\leq_K \cup \leq_B$ jest relacją

    - porządku częściowego
    - porządku liniowego?