PJWSTK: Egzamin z matematyki dyskretnej 4.02.2002

1. (4 pkt) Podaj przykład trzech zbiorów A, B, C takich, że

   a) $(A \cup C) \cap B \neq (A \cup B) \cap C$

   b) $(A \setminus (B \cap C) \neq (A \setminus B) \setminus C$

2. (4 pkt) Udowodnij, że dla każdego n następująca formuła jest tautologią rachunku zdań:

   $$(a_1 \to a_2) \vee (a_2 \to a_3) \vee \ldots \vee (a_{n-1} \to a_n) \vee (a_n \to a_1)$$

3. (4 pkt) Zakładając, że $S(x)$ oznacza predykat „x jest szczęśliwy", zaś $Z(x)$: „x jest zakochany" wyraź fakt, że

   a) Wszyscy zakochani są szczęśliwi

   b) Są ludzie szczęśliwi, choć nie są zakochani

4. (4 pkt) Zaneguj następujące formuły wprowadzając znak negacji do wnętrz kwantyfikatorów tak, aby pozbyć się znaków implikacji wyrażając je przez $\vee, \wedge, \neg$:

   a) $\forall x \in A : P(x) \to (Q(y) \to R(x))$

   b) $\exists x \in A : \forall y \in B \setminus A : (P(x) \vee Q(y)) \to R(x)$

5. (4 pkt) Niech X będzie zbiorem wszystkich odcinków osi rzeczywistej. Jaka jest moc

   a) zbioru wszystkich tych odcinków z X, których końce są liczbami całkowitymi?

   b) X?

6. (4 pkt) Pokaż, że (chyba dam tylko jedno z tych dwoch)

   a) $\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}$

   b) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3n^2+5n}{4n^2+12n+8}$

7. (4 pkt) Podaj przykład relacji, która jest

   a) zwrotna, nieprzechodnia i antysymetryczna

   b) przechodnia, symetryczna i nie jest zwrotna

8. (4 pkt) Pokaż, że nie są relacjami równoważności następujące relacje określone na $\mathbb{N}$

   a) $x \; r_1 \; y \Leftrightarrow |x - y| \leq 2$

   b) $x \; r_2 \; y \Leftrightarrow x \neq y + 1$

9. (4 pkt) Na ile sposobów można włożyć 9 kul ponumerowanych od 1 do 9 do dwóch urn tak, aby

   a) w każdej urnie było co najwyżej pięć kul,

   b) w obu urnach były równe sumy numerów.

10. (4 pkt.) Rzucamy dwa razy wyważoną kostką.

    a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że wyrzucona suma oczek jest podzielna przez 5?

    b) Jekie jest prawdopodobieństwo tego, że na drugiej kostce wypadnie co najmniej czwórka pod warunkiem, że na pierwszej wypadła liczba podzielna prez 3?

Uwaga: Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić na osobnej kartce po kolei.