Zadania z Matematyki Dyskretnej – Indukcja

1. Udowodnić indukcyjnie wzór:

   $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + .. + n \cdot 2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}$, $n \geqslant 1$.

2. Udowodnić indukcyjnie nierówność Bernouliego

   $(1+a)^n \geqslant 1 + n \cdot a, \quad a > -1, \quad n \in \mathbb{N}.$

3. Udowodnić indukcyjnie nierówność Weierstrassa

   $a_k > -1, \quad k = 1, .., n \quad n \geqslant 2,$

   $a_1, .., a_n$ są wszystkie tego samego znaku

   $(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) > 1 + a_1 + .. + a_n.$

4. Udowodnić indukcyjnie nierówność

   $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + .. + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n \geqslant 2$

5. Udowodnić indukcyjnie $8 | 5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$, $n \geqslant 1$.

6. Udowodnić indukcyjnie $11 | 2^{6n+1} + 3^{2n+2}$.

7. Udowodnić indukcyjnie $133 | 11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

8. Udowodnić indukcyjnie, że suma kątów wewnętrznych dowolnego n-kąta wynosi $(n-2)\pi$ dla $n \geqslant 3$.

9. W grafie skierowanym każda para różnych punktów jest połączona strzałką w jednym kierunku. Udowodnić, że istnieje centrum czyli punkt, z którego można dojść do każdego innego punktu w co najwyżej dwóch krokach poruszając się zgodnie z kierunkiem strzałek.

10. Dany jest ciąg $a_0 = 2, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$. Napisać i udowodnić ogólny wzór ciągu.

11. Dany jest ciąg $a_n = \frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$, $a_0 \in \mathbb{R}$ – ustalone. Napisać i udowodnić ogólny wzór ciągu.

12. Przydzielamy $2n$ dzieci do n wagoników po dwoje. Na ile sposobów można to zrobić?

13. Niech $(A_1, A_2, ..)$ będzie ciągiem podzbiorów pewnego zbioru U. Niech $S(1) = A_1, \quad S(n+1) = A_{n+1} \oplus S(n), \quad n \geqslant 1$. Udowodnić indukcyjnie, że dowolny $x \in U$ należy do $S(n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $\{k : x \in A_k, k \leqslant n\}$ ma nieparzystą liczbę elementów.

14. Udowodnimy indukcyjnie, że wszystkie koty są tego samego koloru. Krok pierwszy: Weźmy jednego kota. Jest on tego samego koloru co on sam.

    Krok indukcyjny: Załóżmy, że każde n kotów jest tego samego koloru. Pokażemy, że wtedy każde $(n + 1)$ kotów jest tego samego koloru.

    Weźmy $(n + 1)$ kotów. Bez pierwszego bedzie ich n, zatem są tego samego koloru na mocy założenia indukcyjnego. Bez ostatniego też jest ich n, więc są tego samego koloru. Środkowe koty nie zmieniają koloru, więc wszystkie $(n+1)$ muszą mieć ten sam kolor. Na podstawie indukcji matematycznej wykazaliśmy, że wszystkie koty mają ten sam kolor.

    Jaki to kolor?