SPRAWDZIAN III

Imię i nazwisko:

Nr indeksu:

Nr grupy:

Uwaga! Sprawdzian jest testem wielokrotnego wyboru, gdzie wszystkie możliwe kombinacje odpowiedzi są dopuszczalne (tj. zarówno wszystkie odpowiedzi poprawne, część odpowiedzi poprawna jak i brak odpowiedzi poprawnych). Poprawne odpowiedzi należy zaznaczyć, z lewej strony kartki, symbolem "+". Natomiast symbol "-" jak i brak symbolu przy odpowiedzi oznacza odpowiedź niepoprawną. Pytanie jest uznane za poprawnie rozwiązane (tj. +1pkt) wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie jego odpowiedzi zaznaczone są poprawnie. Życzymy powodzenia ...

1. Załóżmy, że:
   - pewna własność α zachodzi dla liczb naturalnych i takich, że $0 < i \leq 10^3$,
   - jeżeli własność α zachodzi dla pewnych liczb naturalnych $j, j+1, \ldots, j+10^2$, to zachodzi także dla liczby $j + 10^2 + 1$,

   wtedy własność α zachodzi dla:

   (a) [–] 0,
   (b) [+] 10^4,
   (c) [+] dowolnej liczby naturalnej większej od 10^9.

2. Rozważmy następujący algorytm

```
int Cos(int n) { // wp:  n∈ ℕ
   int i=0, s=0;
   while (i≤n) {
      i=i+1;
      s=s+i;
   }
   return s;
}
```

   wtedy:

   (a) [+] niezmiennikiem pętli w programie Cos jest formuła $s = \frac{i(i+1)}{2}$,
   (b) [–] niezmiennikiem pętli w programie Cos jest formuła $s = \frac{(i-1)i}{2}$,
   (c) [+] niezmiennikiem pętli w programie Cos jest formuła $i \geq 0$.

3. W urnie znajduje się 15 kul białych, 20 kul szarych oraz 25 kul czarnych. Wyjmujemy pojedynczo z urny 14 kul i ustawiamy je jedna za drugą. Ile różnych (w sensie kolorów kul) ustawień możemy uzyskać?

   (a) [–] $3^{14} \cdot 14 \cdot \binom{14}{3}$.
   (b) [–] 14!.
   (c) [+] 3^{14}.

4. W skrzynce znajduje się 16 jabłek, 20 gruszek i 24 śliwki. Wyjmujemy pojedynczo ze skrzynki 13 owoców i ustawiamy je jeden za drugim. Ile różnych (w sensie gatunku owoców) ustawień możemy uzyskać, jeżeli wiemy, że zbudujemy ciąg owoców składający się z jednego jabłka, sześciu gruszek i sześciu śliwek?

   (a) [–] $\binom{12}{6} \cdot 13!$.

   (b) [–] $\binom{60}{13} \cdot 13!$.

   (c) [–] $\left(\binom{12}{6} + 13\right) \cdot 3$.

5. Na ile sposobów można włożyć 5 kul ponumerowanych liczbami od 0 do 4 do dwóch identycznych urn tak, aby w każdej urnie znajdowały się co najmniej dwie kule?

   (a) [–] $5!$.

   (b) [–] $\binom{5}{2} + \binom{5}{3}$.

   (c) [–] $\binom{5}{5} \cdot \binom{5}{4} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{5}{2}$.

6. Mamy osiem różnych książek angielskich, sześć niemieckich i dziewięć polskich. Na ile różnych sposobów można ustawić w rzędzie siedem spośród tych książek, jeżeli żądamy aby pewne trzy książki (angielska, niemiecka i polska) stały zawsze koło siebie (w dowolnej kolejności)?

   (a) [–] $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 4!$.

   (b) [–] $\sum_{i=1}^{23} \binom{23}{i}$.

   (c) [–] $23! \cdot \binom{23}{7}$.

7. Rzucamy 12 razy symetryczną monetą. Wiemy, że w pierwszym rzucie otrzymamy reszkę. Ile jest możliwych wyników rzutów, w których reszka wypadła parzystą liczbę razy?

   (a) [+] $\binom{11}{1} + \binom{11}{3} + \binom{11}{5} + \ldots + \binom{11}{11}$.

   (b) [–] $14! \cdot (2 + 4 + 6 + 8 + 10)$.

   (c) [–] $\binom{12}{0} + \binom{12}{2} + \binom{12}{4} + \ldots + \binom{12}{12}$.

8. Egzamin z matematyki dyskretnej zaliczyły 62 osoby. Ile co najmniej liczy grupa studentów, którzy dostali najczęściej wystawioną ocenę, jeżeli przyjmujemy skalę ocen całkowitych od 2 do 5, tj. bez "plusów", "minusów" itd.

   (a) [–] 16.

   (b) [–] 11.

   (c) [–] 19.

9. Niech X będzie n-elementowym zbiorem. Ile można utworzyć różnych (w sensie par składowych) relacji jednocześnie symetrycznych i asymetrycznych nad zbiorem X?

   (a) [–] $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

   (b) [–] 2^{n^2-n+1}.

   (c) [–] $2^n - \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$.

10. Niech X będzie n-elementowym zbiorem. Ile można utworzyć różnych (w sensie klas abstrakcji) relacji równoważności nad zbiorem X, które dzielą ten zbiór na m klas abstrakcji, gdzie $m = n$.

    (a) [–] $2^n \cdot n!$.

    (b) [–] $\binom{n}{1}$.

    (c) [+] $S(n, n)$.

11. Na ile sposobów możemy rozdzielić 26 różnych czekolad do 5-ciu identycznych toreb tak, aby każda zawierała co najmniej jedną ale nie więcej niż 21 czekolad?

    (a) [–] $S(25, 5) - \binom{24}{5}$.

    (b) [–] $S(26, 5) - \binom{26}{5}$.

    (c) [+] $S(26, 5) - \binom{26}{4}$.

12. Niech S i T będą pewnymi niepustymi rozłącznymi zdarzeniami nad przestrzenią zdarzeń elementarnych Ω. Prawdą jest, że:

    (a) [+] $P(S \cap T) = 0$,

    (b) [+] $P(S \cup T) = P(S) + P(T) - 2 \cdot P(S \cap T)$,

    (c) [+] $P(S \cap T) \neq P(S) \cdot P(T)$?

13. Z talii 52 kart wyciągnięto losowo kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to siódemka, jeżeli wiadomo, że wyciągnięta karta nie jest figurą ani asem?

    (a) [–] $\frac{1}{2}$.

    (b) [+] $\frac{4}{36}$.

    (c) [+] $\frac{1}{9}$.

14. Rzucamy kostką, aż do powtórzenia liczby oczek z pierwszego rzutu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wykonano pięć rzutów?

    (a) [–] Co najmniej $\frac{1}{2}$.

    (b) [+] Co najwyżej $\frac{1}{2}$.

    (c) [–] Nie można wyznaczyć prawdopodobieństwa tego zdarzenia ponieważ elementarne rzuty kostką nie są zdarzeniami niezależnymi.

15. Rozkład zmiennej losowej X określa funkcja prawdopodobieństwa dana poniższą tabelką, wtedy:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

    (a) [+] $F(2,5) = 0,3$,

    (b) [+] $E(X) = 3$,

    (c) [–] $V(X) = 7$.

16. Zapis autentycznej rozmowy radiowej przeprowadzonej między amerykańskim okrętami a Kanadyjczykami. Miała ona miejsce w październiku 1995r. u wybrzeży Nowej Funlandii.

- *Kanadyjczycy:* Proszę o zmianę kursu o 15 stopni na południe w celu uniknięcia kolizji.
- *Amerykanie:* Radzimy wam zmienić kurs o 15 stopni na północ, aby uniknąć kolizji.
- *Kanadyjczycy:* To niemożliwe. To wy będziecie musieli zmienić kurs o 15 stopni na południe, aby uniknąć kolizji.
- *Amerykanie:* Mówi kapitan okrętu wojennego Stanów Zjednoczonych. Powtarzam ponownie: wy zmieńcie kurs.
- *Kanadyjczycy:* Nie. Powtarzam: zmieńcie kurs, aby uniknąć kolizji.
- *Amerykanie:* Mówi kapitan lotniskowca USS "Lincoln" - drugiego pod względem wielkości okrętu bojowego amerykańskiej marynarki wojennej floty atlantyckiej. Towarzyszą nam trzy niszczyciele, trzy krążowniki i wiele innych okrętów wspomagania. Domagam się, abyście to wy zmienili kurs o 15 stopni na północ. W innym przypadku podejmiemy kontrdziałania w celu obrony grupy!
- *Kanadyjczycy:* Mówi latarnia morska: wasz wybór!

Jak skończyła się owa historia:

(a) dobrze,

(b) źle,

(c) tego nie wiedzą nawet najstarsi górale.