TEST I

Imię i nazwisko:

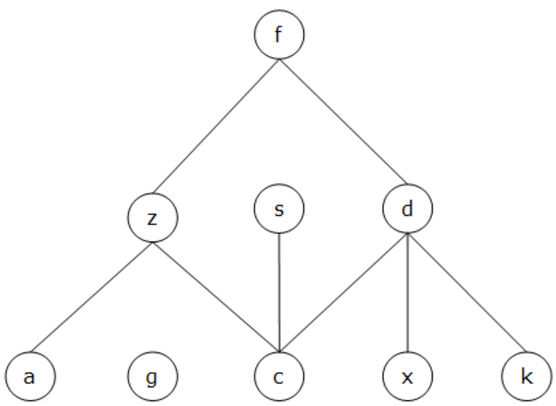
Numer indeksu:

Numer grupy:

Test jest testem wielokrotnego wyboru (tzn. wszystkie kombinacje odpowiedzi są możliwe). Pytanie jest uznane za poprawnie rozwiązane wttw, gdy wszystkie podpunkty w pytaniu mają zaznaczone właściwe odpowiedzi. Odpowiedzi "+" oraz "-" proszę zaznaczać przy każdym podpunkcie pytania w stosownym miejscu - wewnątrz nawiasu kwadratowego poprzedzającego treść [ ]. Życzę powodzenia.

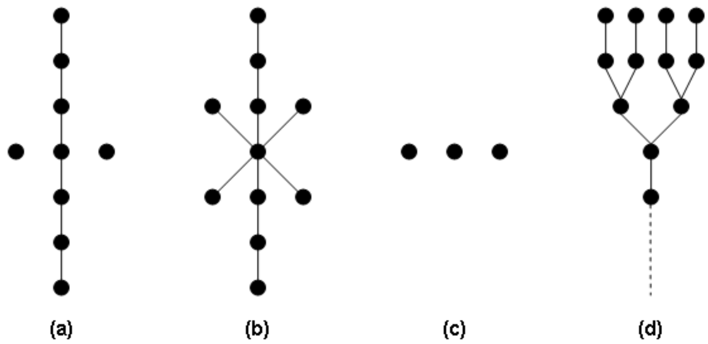
1. Niech $A_t = \{x \in \mathbb{N} : t|x\}$, wtedy:
   - (a) **[+]** jeżeli $T = \{2, 3, 5\}$, to $\bigcap_{t \in T} A_t = \{x \in \mathbb{N} : (2 \cdot 3 \cdot 5)\,|x\}$
   - (b) **[-]** jeżeli $T = \{2, 3, 5\}$, to $\bigcup_{t \in T} A_t = \{x \in \mathbb{N} : (2 \cdot 3 \cdot 5)\,|x\}$
   - (c) **[+]** jeżeli $T = \{2, 3\}$, to $\bigcap_{t \in T} A_t \setminus \bigcup_{t \in T} A_t = \emptyset$
2. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{x : x \text{ jest liczbą pierwszą}\}$, wtedy:
   - (a) **[-]** $A \times B = B \times A$
   - (b) **[+]** $|A \times B| = |B \times A|$
   - (c) **[+]** $(\{2, 3\} \times \{2, 3\}) \subset A \times B$
3. Niech $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$ oraz $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 1, 2\}$, stąd:
   - (a) **[-]** $|A \cap B| = 1$
   - (b) **[+]** $|B \cap C| = 1$
   - (c) **[-]** $|(C \setminus B) \setminus A| = |(C \cup B) \cup A|$
4. Niech A, B oraz C będą zbiorami niepustymi, wtedy:
   - (a) **[+]** $A \oplus B \oplus C \subset A \cup B \cup C$
   - (b) **[-]** $(A \cap B) \subset C' \cup (A \cap B)$
   - (c) **[-]** $C' \setminus (A \cup B) = \emptyset$
5. Niech $U = \{0, 1, 2\}$, wtedy:
   - (a) [-] $r = \{(i, j) \in U^2 : i = j\} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 1)\}$
   - (b) [+] $r = \{(i, j) \in U^2 : i^2 + j^2 = 2\} = \{(1, 1)\}$
   - (c) [+] $r = \{(i, j) \in U^2 : i = \max(\{1, j\})\} = \{(1, 0), (1, 1), (2, 2)\}$
6. Dla dowolnych relacji r_1 oraz r_2 zdefiniowanych nad niepustym uniwersum zachodzi:
   - (a) [-] jeżeli r_1, r_2 są relacjami symetrycznymi, to relacja $r_1 \oplus r_2$ jest zwrotna
   - (b) [+] jeżeli r_1, r_2 są relacjami zwrotnymi, to relacja $r_1 \setminus r_2$ jest przeciwzwrotna
   - (c) [+] jeżeli obie relacje są relacjami pełnymi, to $|r_1 \oplus r_2| < |r_1 \cup r_2|$
7. Relacja $r = \{(x, y) \in X^2 : |x| \leq |y|\}$ jest częściowym porządkiem, gdy:
   - (a) [+] $X = \mathbb{N}$
   - (b) [-] $X = \mathbb{Z}$
   - (c) [+] $X = \emptyset$

8. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie relacją równoważności. Które z poniższych zdań może być prawdziwe:
   (a) [-] $|r| = c$, gdzie c jest pewną stałą naturalną
   (b) [+] $r = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
   (c) [+] $r = r^{-1}$
9. Niech r_1 oraz r_2 będą dowolnymi relacjami równoważności nad niepustym uniwersum, wtedy:
   (a) [+] relacja $r_1 \oplus r_2$ nie jest relacją równoważności
   (b) [-] relacja $r_1 \cup r_2$ nie jest relacją równoważności
   (c) [+] jeżeli $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, to $r_1 \setminus r_2$ jest relacją równoważności
10. Istnieją skończony niepusty zbiór X oraz relacja równoważności r nad zbiorem X takie, że:
   (a) [-] relacja r dzieli zbiór X na dwie klasy abstrakcji A oraz B takie, że $A \cap B \neq \emptyset$,
   (b) [+] relacja r dzieli zbiór X na $\left\lfloor \sqrt{|X|} \right\rfloor$ klas abstrakcji
   (c) [+] relacja r oraz r^{-1} generują identyczne podziały zbioru X
11. Niech r będzie relacją taką, że $r = \{(a, b) \in U : a \bmod 5 = b \bmod 5\}$, gdzie $U = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}^2$, wtedy:
   (a) **[+]** r jest relacją równoważności w zbiorze $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$
   (b) **[-]** $|[1]| \neq |[4]|$
   (c) **[-]** $\bigcup_{i=0}^{3} [i] = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$
12. Załóżmy, że graf pewnej relacji równoważności r w zbiorze $\mathbb{N}$ składa się z 5-ciu rozłącznych podgrafów, wtedy:
   (a) **[-]** liczba klas abstrakcji, na jakie relacja r dzieli zbór $\mathbb{N}$ jest nieokreślona
   (b) **[+]** relacja r dzieli zbiór $\mathbb{N}$ na co najwyżej 5 klas abstrakcji
   (c) **[-]** relacja r dzieli zbiór $\mathbb{N}$ na 5 klas abstrakcji, z których każda zawiera skończoną liczbę elementów
13. Rozważmy zbiór $X = \{a, c, d, f, g, k, s, x, z\}$ uporządkowany relacją r zgodnie z poniższym diagramem Hassego, wtedy:



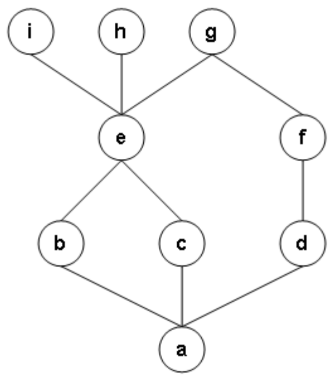
   (a) [+] ograniczeniem dolnym zbioru $\{z, s, d\}$ względem relacji r jest element c
   (b) **[-]** ograniczeniem górnym zbioru $\{c, x, k\}$ względem relacji r jest element d albo f
   (c) [+] $\sup\{s, d\} = f$ lub $\inf\{s, d\} = c$

14. Rozważ zbiory uporządkowane pewnymi relacjami zgodnie z diagramami Hassego przedstawionymi na poniższym rysunku. Które ze zdań jest prawdziwe:



(a) **[-]** w zbiorze (a) istnieje element największy
(b) **[-]** w zbiorze (b) nie istnieje element maksymalny
(c) **[-]** w zbiorze (c) lub (d) można wyróżnić element najmniejszy

15. Rozważ zbiór uporządkowany pewną relacją zgodnie z diagramem Hassego przedstawionym na poniższym rysunku. Które ze zdań jest prawdziwe:



(a) **[-]**$\sup(\{a,b,c,d\}) = e$
(b) **[+]** $\inf(\{f,g,h,i\}) = a$
(c) **[+]** $\sup(\{a,b,c,e\}) \neq h$

16. Niech r będzie relacją taką, że $r = \left\{(A,B) \in P(\{a,b,c,d\})^2 : B \supseteq A\right\}$, wtedy:

(a) **[+]** element maksymalny względem relacji r w zbiorze $P(\{a,b,c,d\})$, to $\{a,b,c,d\}$
(b) **[+]** relacja r wyznacza element najmniejszy w zbiorze $P(\{a,b,c,d\})$
(c) **[+]** relacja r wyznacza element największy w zbiorze $P(\{a,b,c,d\})$

17. Relacja $\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,b),(b,c),(c,c)\}$ jest w zbiorze $\{a,b,c\}$ relacją porządku:

(a) [+] częściowego
(b) [+] liniowego
(c) [+] dobrego

18. Porządkiem liniowym w zbiorze $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ wielokątów wypukłych na płaszczyźnie euklidesowej jest relacja r taka, że:

   (a) [-] $(w_i, w_j) \in r$ wttw wielokąt w_i zawiera się w wielokącie w_j
   (b) [-] $(w_i, w_j) \in r$ wttw pole powierzchni wielokąta w_i jest nie większe niż pole wielokąta w_j
   (c) [-] $(w_i, w_j) \in r$ wttw wielokąt w_i ma tyle samo wierzchołków co wielokąt w_j

19. Jeżeli $(p \vee q) \to r$ oraz $\neg r$ są zdaniami prawdziwymi, to dla dowolnego t zachodzi:

   (a) [+] $q \to t$
   (b) [-] $t \to q$
   (c) [+] $(t \wedge r) \to q$

20. Które z poniższych stwierdzeń jest tautologią rachunku zdań:

   (a) **[+]** $(p \wedge \neg p) \vee (q \oplus \neg q)$
   (b) **[+]** $\neg (p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg p \vee q$
   (c) **[-]** $(p \to q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \to p)$