TEST 2 PRZYKŁADOWY

Imię i nazwisko:

Numer indeksu:

Numer grupy:

Test jest testem wielokrotnego wyboru (tzn. wszystkie kombinacje odpowiedzi są możliwe). Pytanie jest uznane za poprawnie rozwiązane wttw, gdy wszystkie podpunkty w pytaniu mają zaznaczone właściwe odpowiedzi. Odpowiedzi "+" oraz "-" proszę zaznaczać przy każdym podpunkcie pytania w stosownym miejscu - wewnątrz nawiasu kwadratowego poprzedzającego treść [ ]. Życzę powodzenia.

1. Niech U będzie niepustym uniwersum. Które z poniższych zdań jest prawdziwe:
   (a) [-] dowolna relacja $r \subseteq U^2$ jest funkcją
   (b) [+] dowolna funkcja $f \subseteq U^2$ jest relacją
   (c) [+] relacja $r = \{(i,j) \in U^2 : i = j\}$ jest funkcją

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, jeżeli:
   (a) **[-]** $f(x) = |x| + \frac{\pi}{2}$, to funkcja f nie jest suriekcją, ale jest iniekcją
   (b) **[-]** $f(x) = \sin(x) - \frac{\pi}{2}$, to funkcja f jest suriekcją, ale nie jest iniekcją
   (c) **[+]** $f(x) = \frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$, to funkcja f jest bijekcją

3. Niech $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, będzie funkcją oraz $A \subseteq \mathbb{Z}$ pewnym zbiorem, wtedy:
   (a) **[+]** jeżeli $f(x) = 2x + 1$ i $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, to $f(A) = \{-3, -1, 1, 3\}$
   (b) **[+]** jeżeli $f(x) = |x|$ i $A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, to $f(A) = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
   (c) **[+]** jeżeli $f(x) = \max(x, 0)$ i $A = \mathbb{N}$, to $f(A) \neq \mathbb{Z}$

4. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją postaci $f(n) = \sqrt{n}^3 \lg n! + n^2$. Które z podanych poniżej ograniczeń funkcji jest poprawne:
   (a) [-] $f(n) = \Theta(n^2)$
   (b) [+] $f(n) = \Omega\left(n^{\frac{5}{2}}\right)$
   (c) [+] $f(n) = O\left(n^{\sqrt{n}}\right)$

5. Niech $f(n) = n^3 + n \lg n + \sqrt{n}$ oraz $g(n) = 2^{2 \lg n} + n^2$, wtedy:
   (a) [+] $f(n) + g(n) = \Omega(n)$
   (b) [-] $f(n) + g(n) = O(n^2)$
   (c) [-] $f(n) \cdot g(n) = \Theta(n^4)$

6. Jeżeli pewna własność $W(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest prawdziwa dla $n = 1$ i jeżeli $W(n)$ jest prawdą, to $W(n+1)$ także jest prawdą, dla dowolnego $n \geq 1$, to:
   (a) **[+]** własność $W(2^{100})$ jest prawdziwa
   (b) **[-]** własność $W(0)$ jest prawdziwa
   (c) **[-]** jeżeli własność $W(0)$ jest fałszywa, to własność $W(1)$ jest fałszywa

7. Która z poniższych formuł jest niezmiennikiem pętli while w następującym programie:

```
int Cos (int a, int n) { // a>1, n>(-1)
  int i:=0, s:=1;
  while (i<n)
    s:=s*a;
    i:=i+1;
  od
  return s;
}
```

   (a) [+] $i \in \mathbb{N} \wedge s \in \mathbb{N}$

   (b) [+] $s \cdot a = \prod_{j=0}^{i} a,$

   (c) [+] $s \geq a \cdot i$

8. Funkcję $f(n) = 2^{n-1}$, dla $n > 0$, można zdefiniować następującym równaniem rekurencyjnym:

   (a) [+] $f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(i)$ dla $n > 1$

   (b) [+] $f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(n) = 2f(n-1)$ dla $n > 1$

   (c) [-] $f(0) = 1,\ f(n) = 2f(n-1)$, dla $n > 0$

9. W urnie znajduje się 15 kul białych, 20 kul szarych oraz 25 kul czarnych. Wyjmujemy pojedynczo z urny 14 kul i ustawiamy je jedna za drugą. Ile różnych (w sensie kolorów kul) ustawień możemy uzyskać:

   (a) **[-]** $3^{14} \cdot 14 \cdot \binom{14}{3}$

   (b) **[-]** $14!$

   (c) **[+]** 3^{14}

10. Rzucamy 12 razy symetryczną monetą. Wiemy, że w pierwszym rzucie otrzymamy reszkę. Ile jest możliwych wyników rzutów, w których reszka wypadła parzystą liczbę razy:

   (a) **[+]** $\binom{11}{1} + \binom{11}{3} + \binom{11}{5} + \ldots + \binom{11}{11}$

   (b) **[-]** $14! \cdot (2 + 4 + 6 + 8 + 10)$

   (c) **[-]** $\binom{12}{0} + \binom{12}{2} + \binom{12}{4} + \ldots + \binom{12}{12}$

ZADANIA OTWARTE

Zadanie nr 1 (5 pkt) Udowodnij indukcyjnie, że dla każdego $n > 0$, $F(4n)$ jest podzielne przez 3, gdzie $F(n)$ jest n-tą liczbą Fibonacciego.

Zadanie nr 2 (5 pkt) Stosując metodę wielomianu charakterystycznego znajdź postać jawną n-tego wyrazu ciągu rekurencyjnego $G(n)$, gdzie

$$G(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 1 & \text{dla} \quad n = 1 \\ G(n-1) + G(n-2) + 1 & \text{dla} \quad n \geq 2 \end{cases}$$