Relacje

1. Wyznacz wszystkie elementy relacji $r \subseteq X \times Y$, gdy:

   (a) $X = \{\text{pyton, sęp, struś}\}$, $Y = \{\text{zebra, gepard}\}$ oraz $x\ r\ y$ wttw, gdy słowo x nie ma ani jednej wspólnej litery ze słowem y,

   (b) $X = Y = \{0, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, 1\}$ oraz $x\ r\ y$ wttw, gdy $\frac{x}{y} \geqslant 1$.

2. Zapisz relację $r \subseteq U \times U$ jako (a) zbiór par uporządkowanych, (b) w postaci tabelki (macierzy) i (c) w postaci grafu. Określ jej własności.

   (a) $U = \{-3, -2, 0, 1, 4, 5, 6\}$, $(n, m) \in r$ wttw $m^2 - n^2 \equiv 0 \pmod 3$,

   (b) $U = \{-12, -8, -2, -1, 0, 2, 4, 5, 6\}$, $(n, m) \in r$ wttw $n|m$ (n jest dzielnikiem m),

   (c) $U = \{-10, -5, -4, -3, 1, 2, 4, 5\}$, $(n, m) \in r$ wttw $|n + m| < |m|$.

3. Jakie własności ma graf relacji określonej w zbiorze o skończonej liczbie elementów, jeśli relacja ta jest: (a) zwrotna, (b) symetryczna, (c) antysymetryczna, (d) spójna, (e) przechodnia, (f) relacją równoważności. Podaj odpowiednie przykłady.

4. Jakie własności ma tabelka relacji określonej w zbiorze o skończonej liczbie elementów, jeśli relacja ta jest: (a) zwrotna i symetryczna, (b) przeciwzwrotna i antysymetryczna. Podaj odpowiednie przykłady.

5. Sprawdź, które z własności: zwrotność, przeciwzwrotność, symetryczność, antysymetryczność, przeciwsymetryczność (asymetryczność), przechodniość, spójność posiada relacja $r \subseteq A \times A$ gdy:

   (a) A - zbiór miast leżących w Azji, $r = \{(a, b) : a$ jest miastem położonym nie niżej nad poziomem morza niż miasto $b\}$,

   (b) $A = \{x, y, z\}$, $r = \{(x, x), (y, x), (y, z), (z, z), (z, y)\}$,

   (c) $A = 2^{\mathbb{N}}$, $r = \{(X, Y) : X \subseteq Y\}$,

   (d) $A = \mathbb{N}$, $r = \{(a, b) : \mathrm{NWD}(a, b) = 1\}$, gdzie NWD oznacza największy wspólny dzielnik.

6. Zbadaj własności podanej relacji (zwrotność, przeciwzwrotność, symetria, przeciwsymetria, przechodniość, antysymetria):

   (a) r jest relacją binarną w zbiorze liczb naturalnych taką, że $x\ r\ y$ wttw istnieje różna od 1 liczba naturalna, która jest dzielnikiem zarówno x, jak i y,

   (b) r jest relacją binarną w zbiorze liczb $\{1, 2, 3, ..., 9\}$ taką, że $x\ r\ y$ wttw $x - y$ jest liczbą parzystą,

   (c) r jest relacją binarną w zbiorze liczb naturalnych taką, że $x\ r\ y$ wttw liczba jedynek w binarnej reprezentacji liczby x jest mniejsza niż liczba jedynek w binarnej reprezentacji liczby y.

7. Niech $P(n)$ będzie programem z jednym argumentem wywołania będącym liczbą całkowitą i zwracającym również liczbę całkowitą. W zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ określamy relację r taką, że $a\ r\ b$ wttw $b \in Res(P(a))$, gdzie $Res(P(a))$ jest zbiorem wszystkich wartości, które może zwrócić program P dla danej początkowej a. Określ własności relacji r oraz wyznacz $Res(P(4))$, gdy

   (a) $P(n) = \{x := n;\ \ return\ \ x\}$,

   (b) $P(n) = \{x := n + 1;\ \ return\ \ x\}$,

   (c) $P(n) = \{x := random(\mathbb{N});\ \ return\ \ x\}$, gdzie $random(X)$ jest akcją losującą dowolną liczbę ze zbioru X,

   (d) $P(n) = \{x := random(\{0, 1, 2, \ldots, n\});\ \ return\ \ x\}$,

   (e) $P(n) = \{if\ \ 3|n\ \ then\ \ x := 0\ \ else\ \ if\ \ 3|(n + 1)\ \ then\ \ x := 2\ \ else\ \ x := 1;\ \ fi\ fi;\ \ return\ \ x\}$.

8. Niech U będzie zbiorem wszystkich możliwych stanów gry "Kółko i krzyżyk". Powiemy, że stan gry S_i jest w relacji r ze stanem gry S_j wtedy i tylko wtedy, gdy planszę stanu S_j można otrzymać z planszy stanu S_i przez jednokrotne lustrzane odbicie planszy stanu S_i względem jednej z jej krawędzi. Określ własności relacji $r \subseteq U \times U$.

9. Rozważmy algorytm

$$Alg(n) = \{if\ \ n > 0\ \ then\ \ if\ \ n\ \ mod\ \ 2\ = \ 0\ \ then\ \ Alg(n/2);\ \ else\ \ Alg(n-1);\ \ fi\ \ fi\}.$$

Niech U będzie zbiorem wszystkich wykonań algorytmu Alg, dla $n \in \mathbb{N}$. Powiemy, że wykonanie algorytmu $Alg\,(i)$ jest w relacji r z wykonaniem algorytmu $Alg\,(j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wykonanie $Alg\,(i)$ jest rekurencyjnie osiągalne z wykonania $Alg\,(j)$. Określ własności relacji $r \subseteq U \times U$.

10. Relacja r określona w zbiorze X jest euklidesowska, gdy dla dowolnych $x, y, z \in X$, jeśli $x\ r\ y$ i $x\ r\ z$, to również $y\ r\ z$. Sprawdź, która z relacji spełnia ten warunek.

   (a) $r \subset 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$, $A\ r\ B$ wttw, gdy $A \cap B = \emptyset$,

   (b) $r \subset \mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3$, $(x_1, x_2, x_3)\ r\ (y_1, y_2, y_3)$ wttw, gdy $x_2 = y_2$.

11. Sprawdź, czy relacja r określona w zbiorze X jest relacją równoważności. Jeśli tak, to wyznacz jej klasy abstrakcji.

   (a) X - zbiór miast leżących w Europie, $r = \{(x, y) : x$ jest miastem położonym w tym samym państwie, co miasto $y\}$,

   (b) X - zbiór studentów wszystkich warszawskich uczelni, $r = \{(x, y) : x$ studiuje na tej samej uczelni, co $y\}$,

   (c) $X = \{x, y, z\}$, $r = \{(x, x), (y, y), (y, z), (z, y), (z, z)\}$,

   (d) $X = \mathbb{Z}$, $r = \{(x, y) : (x - y)(x + y) = 0\}$,

   (e) $X = \mathbb{Z}$, $r = \{(x, y) : x - y$ jest podzielne przez $3\}$,

   (f) $X = \mathbb{N}$, $r = \{(x, y) : xy = 2k$ dla $k \in \mathbb{Z}\}$,

   (g) $X = \mathbb{N}$, $r = \{(x, y) : \max\{x, y\} = x\}$,

12. Sprawdź, czy relacja r określona w zbiorze X jest relacją równoważności. Jeśli tak, to wyznacz jej klasy abstrakcji.

   (a) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x_1, y_1)\ r\ (x_2, y_2)$ wttw, gdy $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$,

   (b) $X = \mathbb{Z}\backslash\{0\} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $(x_1, y_1)\ r\ (x_2, y_2)$ wttw, gdy $x_1 y_2 = y_1 x_2$.

13. Niech U będzie zbiorem programów deterministycznych z jednym argumentem wywołania będącym liczbą całkowitą i zwracającym również liczbę całkowitą. W zbiorze Uokreślamy relację r taką, że $P_1\ \ r\ \ P_2$ wttw $P_1(z) = P_2(z)$ dla każdego $z \in \mathbb{Z}$ (programy P_1 i P_2 zwracają tę samą wartość dla tych samych danych początkowych). Czy r jest relacją równoważności? Odpowiedź uzasadnij.

14. Niech P będzie programem deterministycznym z jednym argumentem wywołania będącym liczbą całkowitą i zwracającym również liczbę całkowitą. W zbiorze liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ określamy relację r taką, że $z_1\ r\ z_2$ wttw $P(z_1) = P(z_2)$ (wartości zwrócone przez program P dla liczb z_1 i z_2 są identyczne). Czy jest to relacja równoważności? Jeśli tak, to opisz klasę abstrakcji, której reprezentantem jest liczba 5, jeśli

   (a) $P(z) = \{x := z\ \ \mathrm{mod}\ \ 3;\ \ return\ \ x\}$,

   (b) $P(z) = \{x := |z|;\ \ return\ \ x\}$,

   (c) $P(z) = \{x := \min\{0, z\};\ \ return\ \ x\}$,

   (d) $P(z) = \{\ if\ \ z|10\ \ then\ \ x := 1\ \ else\ \ x := 0;\ \ return\ \ x\}$.

15. Niech $U = \{Alg_1, Alg_2, Alg_3, Alg_4, \ldots\}$ będzie zbiorem wszystkich skończonych jednoargumentowych algorytmów rekurencyjnych, gdzie argumentem wywołania dowolnego algorytmu $Alg \in U$ jest pewna liczba $n \in \mathbb{N}$. Powiemy, że algorytm Alg_i jest w relacji r z algorytmem Alg_j wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $n_i, n_j \in \mathbb{N}$ takie, że drzewo wywołań rekurencyjnych algorytmu $Alg_i\,(n_i)$ ma taki sam kształt jak drzewo wywołań rekurencyjnych algorytmu $Alg_j\,(n_j)$. Określ własności relacji $r \subseteq U \times U$. Dodatkowo, jeżeli r jest relacją równoważności w uniwersum U, to podaj dowolny algorytm rekurencyjny należący do klasy abstrakcji elementu:

   (a) *Alg(n)={ if n>0 then Alg(n div 3); fi }*,

(b) *Alg(n)={ if n>0 then Alg(n-1); Alg(n-1); fi },*

(c) *Alg(n)={ if n>1 then Alg(n-1); Alg(n-2); fi },*

(d) *Alg(n)={ if n>1 then Alg(n-1); Alg(n-2); Alg(n-3); ... ;Alg(0); fi }.*

16. Rozważmy algorytm

$$Alg(n) = \{i := 1;\ \ while\ \ i < n\ \ do\ \ i := 3 \cdot i;\ \ od\}.$$

Niech U będzie zbiorem wszystkich wykonań algorytmu Alg, dla $n \in \mathbb{N}_+$. Powiemy, że wykonanie algorytmu $Alg\,(i)$ jest w relacji r z wykonaniem algorytmu $Alg\,(j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy liczba iteracji pętli while wykonania $Alg\,(i)$ jest równa liczbie iteracji pętli *while* wykonania $Alg\,(j)$. Określ własności relacji $r \subseteq U \times U$. Dodatkowo, jeżeli r jest relacją równoważności w uniwersum U, to podaj klasę abstrakcji elementu:

(a) $Alg\,(2)$,

(b) $Alg\,(34)$,

(c) $Alg\,(k)$, gdzie $k \in \mathbb{N}_+$.

17. Niech A $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz niech r_1 i r_2 będą dwiema relacjami binarnymi w A: $r_1 = \{(x, y) \in A \times A : y \equiv (x + 4) \pmod 6\}$, $r_2 = \{(x, y) \in A \times A\ :\ x$ jest najmniejszą liczbą nieparzystą większą niż $y\}$. Wyznacz r_1^{-1}. Narysuj graf relacji złożonej $r_1 \circ r_2$. Czy relacja $r_2 \circ r_1$ jest identyczna z relacją $r_1 \circ r_2$?

18. Rozważmy trzy niedeterministyczne programy:

$$P_1(z) = \{x := random(\{0, 1, 2, 3\});\ \ y := x + z;\ \ return\ \ y\},$$

$$P_2(z) = \{\ if\ \ z\ \bmod\ 2 = 0\ \ then\ \ y := \frac{y}{2}\ \ else\ \ y := random(\{0, 1\});\ \ return\ \ y\},$$

$$P_3(z) = \{x := P_1(z);\ \ y := P_2(x);\ \ return\ \ y\}.$$

W zbiorze $\{-3, 0, 1, 2\}$ definiujemy trzy relacje r_i, dla $i \in \{1, 2, 3\}$ takie, że $a\ r_i\ b$ wttw $b \in Res(P_i(a))$, gdzie $Res(P_i(a))$ jest zbiorem wszystkich możliwych wyników programu P_i uzyskanych dla wartości początkowej a.

(a) Wyznacz dziedzinę i przeciwdziedzinę relacji r_1 i r_2.

(b) Wskaż zależność pomiędzy relacją r_3 i relacjami r_1 i r_2.

(c) Wyznacz r_1^{-1}, r_2^{-1}, r_3^{-1}.

(d) Wyznacz $(r_1 \circ r_2) \circ r_3^{-1}$.

19. Niech r będzie relacją binarną określoną w zbiorze U. Udowodnij, że:

(a) jeśli relacja r jest symetryczna, to relacja r^{-1} też jest symetryczna,

(b) jeśli relacje r_1 i r_2 są antysymetryczne, to relacja $r_1 \cap r_2$ też jest antysymetryczna,

(c) jeśli relacje r_1 i r_2 są zwrotne, to relacja $r_1 \circ r_2$ też jest zwrotna.

20. Niech r, s i u będą relacjami binarnymi określonymi w zbiorze U. Zbadaj prawdziwość podanych zdań:

(a) Jeżeli r i s są relacjami przechodnimi, to ich przecięcie $r \cap s$ też jest relacją przechodnią.

(b) Jeżeli $r \cap s$ jest relacją przechodnią, to obie relacje r i s są przechodnie.

(c) Jeżeli relacje r i s są symetryczne, to ich suma $r \cup s$ jest relacją symetryczną.

(d) Jeżeli suma $r \cup s$ relacji jest relacją symetryczną, to każda z relacji r, s musi być symetryczna.