Rekursja I

1. Podaj definicję rekurencyjną ciągu $(2, 2^2, (2^2)^2, ((2^2)^2)^2, \ldots)$.
2. Niech $\Sigma = \{a, b, c\}$ i niech $s(n)$ oznacza liczbę słów długości n, które nie mają kolejnych liter a. Znajdź wzór rekurencyjny na $s(n)$.
3. Znajdź równanie rekurencyjne dla liczby n-elementowych ciągów ternarnych, w których:
   (a) liczba zer jest parzysta,
   (b) liczba zer i liczba jedynek są parzyste.
4. Znajdź równanie rekurencyjne dla liczby sposobów połączeń w pary wierzchołków wypukłego $2n$-kąta za pomocą nie przecinających się odcinków (boki, przekątne).
5. Dana jest rekurencyjna definicja ciągu (a_n). W każdym z podanych przypadków, znajdź wzór na n-ty wyraz tego ciągu, a następnie stosując zasadę indukcji udowodnij, że podałeś poprawną odpowiedź.
   (a) $a_0 = p$, $a_n = a_{n-1} + (p + n)$ dla $n > 0$ (parametr p jest pewną liczbą naturalną),
   (b) $a_0 = 3$, $a_n = a_{n-1}(2a_{n-1} + 1)^{-1}$ dla $n > 0$,
   (c) $a_0 = 5$, $a_n = 2a_{n-1} + 1$ dla $n > 0$
   (d) $a_0 = 2$, $a_n = 2a_{n-1} + 3$ dla $n > 0$.
6. Niech $\Sigma = \{a, b\}$ i niech $t(n)$ oznacza liczbę słów długości n, w których jest parzysta liczba liter a. Znajdź wzór na $t(n)$ i udowodnij, że jest on poprawny.
7. Niech a_n będzie liczbą ternarnych ciągów długości n, w których:
   (a) żadne dwie jedynki nie stoją obok siebie,
   (b) żadne dwie jedynki ani żadne dwie dwójki nie stoją obok siebie.

   Znajdź wzór rekurencyjny na a_n i udowodnij, że jest on poprawny.
8. Udowodnij przez indukcję względem n, że ciąg liczb naturalnych postaci $1, 4, 9, ..., n^2, ...$ można zdefiniować rekurencyjnie w następujący sposób $c(0) = 1$ oraz $c(n) = c(n-1) + 2(n+1) - 1$, dla dowolnego $n \geqslant 1$.
9. n-tą liczbą piramidalną T_n nazywamy sumę n pierwszych liczb trójkątnych. Inaczej, n-ta liczba piramidalna, to liczba kul ustawionych w piramidę o krawędziach złożonych z n kul. Udowodnij, że $T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ dla dowolnego n naturalnego.
10. Zadanie znalezienia minimum i maksimum w danym n-elementowym ciągu można rozwiązać stosując następujący algorytm rekurencyjny:

    Krok 1. jeśli ciąg ma tylko 2 elementy, to porównaj je i ustal rozwiązanie,

    Krok 2. w przeciwnym przypadku, znajdź rekurencyjnie minimum i maksimum dla każdej z $\frac{n}{2}$-elementowych połówek ciągu i ustal wynik ostateczny porównując znalezione maksima i porównując znalezione minima.

    Narysuj drzewo wywołań rekurencyjnych rozważanego algorytmu. Przedstaw równanie rekurencyjne opisujące liczbę wykonanych porównań przy założeniu, że liczba n elementów ciągu jest potęgą dwójki, $n = 2^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}^+$. Zaproponuj rozwiązanie tego równania i udowodnij indukcyjnie jego poprawność ze zwględu na k.
11. Zadanie uporządkowania n-elementowego ciągu można rozwiązać stosując następujący algorytm rekurencyjny:

    Krok 1. jeśli ciąg ma tylko 2 elementy, to porównaj je i ustal rozwiązanie,

    Krok 2. w przeciwnym przypadku, wyznacz rekurencyjnie uporządkowanie dla każdej z połówek i ustal wynik końcowy scalając obie uporządkowane połówki rozmiaru $\frac{n}{2}$ w jeden ciąg uporządkowany rozmiaru n wykonując $O(n)$ porównań.

Narysuj drzewo wywołań rekurencyjnych rozważanego algorytmu. Przedstaw równanie rekurencyjne opisujące pesymistyczną liczbę wykonanych porównań przy założeniu, że liczba n elementów ciągu jest potęgą dwójki, $n = 2^k$, gdzie $k \in \mathbb{N}^+$. Zaproponuj rozwiązanie tego równania i udowodnij indukcyjnie jego poprawność ze względu na k.

12. Pewien algorytm rekurencyjny dla n-elementowego ciągu wejściowego działa względem następującego schematu:

    Krok 1. jeśli $n \leqslant 1$ wtedy nie wykonuj żadnej operacji dominującej,

    Krok 2. w przeciwnym przypadku wybierz losowo k-ty element ciągu, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$, podziel stosując $n - 1$ operacji dominujących ciąg na dwie części rozmiaru odpowiednio $k - 1$ oraz $n - k$ i wykonaj rekurencyjnie algorytm dla obu części.

    Narysuj drzewo wywołań rekurencyjnych rozważanego algorytmu. Przedstaw równanie rekurencyjne opisujące liczbę wykonanych operacji dominujacych oraz zaproponuj rozwiązanie tego równania w przypadku:

    (a) pesymistycznym,

    (b) średnim,

    względem pozycji elementu dzielącego.

13. Podaj rekurencyjny algorytm wyznaczający:

    (a) k^n, gdzie k i n są pewnymi dodatnimi liczbami naturalnymi,

    (b) sumę elementów ciągu n liczb naturalnych, zapisanego w tablicy $A[1..n]$.

    Narysuj drzewo wywołań rekurencyjnych rozważanego algorytmu. Wytypuj operację dominującą w owym algorymie i przedstaw równanie rekurencyjne opisujące liczbę jej wykonań. Zaproponuj rozwiązanie równania.

14. Niech $node = (e, left, right)$ będzie strukturą danych reprezentującą węzeł drzewa binarnego T w taki sposób, że $e \in \mathbb{N}$ jest etykietą rozważago węzła a $left$ i $right$ reprezentują odpowiednio krawędź (dowiązanie) do lewego i prawego następnika wierzchołka z etykietą e w drzewie T. Rozważmy następujący algorytm ($NULL$ oznacza brak węzła):

    $Alg(node) = \{$

    $\quad if\ \ node\ = \ NULL\ \ then\ \ return\ \ 0;$

    $\quad else\ \ return\ \ Alg(node.left) + Alg(node.right) + node.e;\ \ fi$

    $\quad \}.$

    Kolejno:

    (a) narysuj drzewo wywołań rekurencyjnych algorytmu $Alg(root)$, gdzie $root$ jest wierzchołkiem-korzeniem drzewa binarnego T,

    (b) ustal rezultat działania algorytmu $Alg(root)$,

    (c) oszacuj asymptotycznie liczbę operacji dodawania wzgledem liczby wierzchołków drzewa binarnego T.

15. Niech $node = (e, left, right)$ będzie strukturą danych reprezentującą węzeł drzewa binarnego T w taki sposób, że $e \in \mathbb{N}$ jest etykietą rozważanego węzła a $left$ i $right$ reprezentują odpowiednio krawędź (dowiązanie) do lewego i prawego następnika wierzchołka z etykietą e w drzewie T. Zaproponuj algorytm rekurencyjny, który wyznaczy:

    (a) wysokość drzewa binarnego T,

    (b) liczbę wierzchołków wewnętrznych w drzewie binarnym T,

    (c) liczbę wierzchołków zewnętrznych (liści) w drzewie binarnym T,

    (d) liczbę wierzchołków o nieparzystych etykietach w drzewie binarnym T,

    (e) utworzy drzewo binarne T' będące lustrzanym odbiciem drzewa T względem osi pionowej.