SPRAWDZIAN II

Imię i nazwisko:

Nr indeksu:

Nr grupy:

Uwaga! Sprawdzian jest testem wielokrotnego wyboru, gdzie wszystkie możliwe kombinacje odpowiedzi są dopuszczalne (tj. zarówno wszystkie odpowiedzi poprawne, część odpowiedzi poprawna jak i brak odpowiedzi poprawnych). Poprawne odpowiedzi należy zaznaczyć, z lewej strony kartki, symbolem "+". Natomiast symbol "-" jak i brak symbolu przy odpowiedzi oznacza odpowiedź niepoprawną. Pytanie jest uznane za poprawnie rozwiązane (tj. +1pkt) wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie jego odpowiedzi zaznaczone są poprawnie. Życzymy powodzenia ...

1. Która z poniższych relacji jest funkcją:
   (a) [–] $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $r = \{(x, y) : \min(x, y) = 7\}$,
   (b) [+] $r \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $r = \{(x, y) : y = \cos(x^2)\}$,
   (c) [–] $r \subseteq \{a, b, c\} \times \{1, 2, 3, 4\}$, $r = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (c, 4)\}$?

2. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją, jeżeli:
   (a) [–] $X = \mathbb{R}$ i $f(x) = x^2$, to $Y = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$,
   (b) [+] $X = \mathbb{R}$ i $f(x) = x^2$, to $Y \supseteq \mathrm{Im}(f)$,
   (c) [+] $X = \mathbb{R}$ i $f(x) = x^2$, to $Y \cap \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

3. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, jeżeli:
   (a) [–] $f(x) = |x| + \frac{\pi}{2}$, to funkcja f nie jest suriekcją, ale jest iniekcją,
   (b) [–] $f(x) = \sin(x) - \frac{\pi}{2}$, to funkcja f jest suriekcją, ale nie jest iniekcją,
   (c) [+] $f(x) = \frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$ oraz $f(0) = 0$, to funkcja f jest bijekcją.

4. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$, wtedy:
   (a) [–] dla $A = [-1, 1]$ zachodzi $f(A) = (0, \infty)$,
   (b) [+] dla $B = (1, 2)$ zachodzi $f^{-1}(B) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,
   (c) [–] dla $C = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ zachodzi $f(C) \cap f^{-1}(C) = \emptyset$.

5. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, jeżeli:
   (a) [–] $f(x) = ||x| - 2|$, to $f^{-1}(x) = \left|\frac{1}{2}|x| - 1\right|$,
   (b) [–] $f(x) = x^5 + 5$, to $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 5}$,
   (c) [+] $f(x) = f^{-1}(x)$, to $f(x) = x$.

6. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami, jeżeli:
   (a) [–] $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, $h(x) = \sin x$, to $(g \circ f \circ h)(x) = \sin(2x^2)$,
   (b) [–] $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x^2$, to $(g \circ f \circ h)(x) = (2 \sin(x))^2$,
   (c) [–] $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$, to $f(x) = g(x) = h(x)$.

7. Który z poniższych ciągów funkcji jest uporządkowany rosnąco względem rzędów funkcji składowych:

   (a) [–] $\lg n^2$, $\sqrt{n}$, $n\sqrt{n}$, $\lg n!$,

   (b) [+] $n \lg n$, $n\sqrt{n}$, 2^n, $9^{\frac{n}{2}}$,

   (c) [+] $2^{\lg n}$, $n^2, n!$, $(n-1)^{n-2}$?

8. Które z poniższych oszacowań jest poprawne dla funkcji $f(n) = n\sqrt{n}$:

   (a) [+] $f(n) = \Omega(n \lg n)$,

   (b) [–] $f(n) = O(n \lg n)$,

   (c) [–] $f(n) = \Theta\left(n^2 - c\right)$, gdzie $0 < c < 1$ jest pewną stałą?

9. Niech r_1 będzie relacją zwrotną i symetryczną oraz r_2 będzie relacją symetryczną i przechodnią, wtedy:

   (a) [+] $r_1 \cap r_2$ jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią,

   (b) [–] $r_1 \cup r_2$ jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią,

   (c) [–] $r_1 \oplus r_2$ jest relacją zwrotną, symetryczną i przechodnią.

10. Rozważmy relację $r = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b = 0 \bmod 2\}$, wtedy:

    (a) [–] relacja r jest zwrotna, przechodnia i spójna,

    (b) [+] relacja r nie jest przeciwsymetryczna i antysymetryczna,

    (c) [+] relacja r jest relacją równoważności w zbiorze $\mathbb{N}$.

11. Załóżmy, że graf pewnej relacji równoważności r w zbiorze $\mathbb{N}$ składa się z 5-ciu rozłącznych podgrafów, wtedy:

    (a) [–] liczba klas abstrakcji, na jakie relacja r dzieli zbór $\mathbb{N}$ jest nieokreślona,

    (b) [+] relacja r dzieli zbiór $\mathbb{N}$ na co najwyżej 5 klas abstrakcji,

    (c) [–] relacja r dzieli zbiór $\mathbb{N}$ na 5 klas abstrakcji, z których każda zawiera skończoną liczbę elementów.

12. Niech $r \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $r = \{(x, y) : x \cdot y \geq 0\}$, wtedy:

    (a) [–] r^{-1} jest relacją symetryczną, przeciwsymetryczną oraz antysymetryczną,

    (b) [+] $r^{-1} \circ r^{-1}$ jest relacją zwrotną i spójną,

    (c) [–] $r^{-1} \circ r \circ r^{-1} = \emptyset$.

13. Niech $r \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2$ oraz $(x_1, y_1)\ r\ (x_2, y_2)$ wttw, gdy $x_1 < x_2$ lub $(x_1 = x_2$ i $y_1 \leq y_2)$, wtedy:

    (a) [+] relacja r jest relacją porządku częściowego w zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

    (b) [+] relacja r jest relacją porządku liniowego w zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

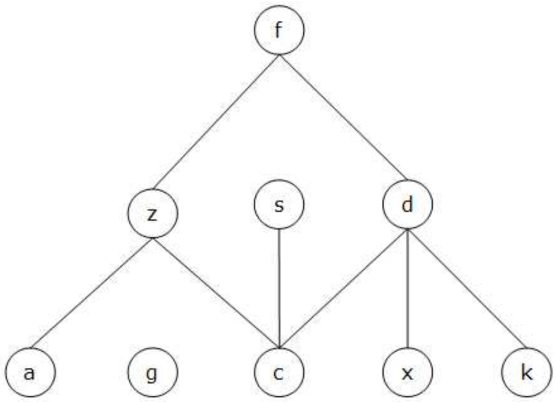
    (c) [+] relacja r jest relacją porządku dobrego w zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

14. Rozważmy zbiór $X = \{a, c, d, f, g, k, s, x, z\}$ uporządkowany relacją r zgodnie z poniższym diagramem Hassego, wtedy:

   (a) [+] elementem minimalnym zbioru (X, r) jest a, c, x,

   (b) [–] elementem maksymalnym zbioru (X, r) jest g, f i są to wszystkie elementy maksymalne,

   (c) [–] elementem najmniejszym zbioru (X, r) jest c lub elementem największym zbioru (X, r) jest f.



15. Rozważmy zbiór (X, r) zdefiniowany w zadaniu 14-stym, wtedy:

   (a) [+] ograniczeniem dolnym zbioru $\{z, s, d\}$ względem relacji r jest element c,

   (b) [–] ograniczeniem górnym zbioru $\{c, x, k\}$ względem relacji r jest element d albo f,

   (c) [+] $\sup\{s, d\} = f$ lub $\inf\{s, d\} = c$.

16. W jakiej sali odbywają się zajęcia ćwiczeniowe z matematyki dyskretnej:

   (a) jeżeli nie w C101, to w D301,

   (b) gimnastycznej,

   (c) nie mam takich zajęć.