ĆWICZENIA XIII

(prawdopodobieństwo)

Zadania

1. W urnie znajduje się n kul, z których 4 są czarne. Jaka musi być liczba kul w urnie, aby prawdopodobieństwo wylosowania 2 kul czarnych było nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$?
2. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że przypadkowo wzięta liczba naturalna jest podzielna przez 2 lub przez 3.
3. Mamy pewien niesprawny automat telefoniczny. Po wrzuceniu monety i wykręceniu numeru automat czasem nie daje połączenia, chociaż monetę kasuje, a czasem daje połączenie i zwraca monetę. Załóżmy, że średnio na 10 monet wrzuconych automat 8 kasuje oraz średnio na 10 wrzuconych monet automat również 8 razy daje połączenie. Załóżmy ponadto, że automat średnio na 10 wrzuconych monet 9 razy kasuje monetę lub daje połączenie. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia: „automat kasuje monetę i daje połączenie".
4. Dziesięć osób posadzono przy okrągłym stole. Przyjmując, że wszystkie sposoby, w jakie można to zrobić, są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że ustalone dwie osoby będą siedziały obok siebie.
5. Dziesięć kul numerowanych liczbami od 1 do 10 rozmieszczono w 3 szufladach. Zakładając, że wszystkie możliwe rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że przynajmniej jedna szuflada będzie pusta.
6. W pewnym zbiorze zdarzeń elementarnych Ω dane są dwa zdarzenia, takie że $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. Czy zdarzenia A i B mogą się wyłączać?
7. Dowieść, że jeżeli $P(A) + P(B) > 1$, to $A \cap B \neq \emptyset$.
8. Niech A i B będą zdarzeniami losowymi. Wykazać, że $P(A) + P(A' \cap B) = P(B) + P(A \cap B')$.
9. Dowieść, że jeżeli $P(B) > 0$, to $P(A|B) \geq 1 - \frac{P(A')}{P(B)}$.
10. Rzucamy sześć razy kostką. Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie raz szóstki i dwa razy piątki.
11. Loteria zawiera 1000 losów z następującymi wygranymi: 1 - 500 zł, 10 po 100 zł, 50 po 20 zł i 100 po 5 zł. Pozostałe losy nie wygrywają. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że kupujący jeden los wygra co najmniej 20 zł?
12. Po terenie pewnego miasta przeciętnie jeździ 1000 samochodów. Prawdopodobieństwo wezwania pogotowia technicznego w ciągu doby przez jeden samochód wynosi p=0,002. Obliczyć prawdopodobieństwo wezwania pogotowia przez którykolwiek z samochodów zakładając, że wezwania są zdarzeniami niezależnymi.
13. Z talii 52 kart wyciągnięto losowo kartę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to siódemka, jeżeli wiadomo, że wyciągnięta karta nie jest figurą ani asem?
14. Liczby 1,2,...,10 ustawiono w ciąg w sposób losowy. Oblicz prawdopodobieństwo, że 1 występuje przed 7 jeżeli wiadomo, że 7 stoi na trzecim miejscu?
15. Strzelec trafia w tarczę z prawdopodobieństwem 0,9. Na każde 10 strzałów trafiających w tarczę dwa trafiają w "dziesiątkę". Oblicz prawdopodobieństwo, że strzelając jeden raz strzelec trafi w dziesiątkę.

16. Stwierdzono, że przy spryskiwaniu drzew owocowych pewnym środkiem ochronnym ginie 70% gąsiennic, natomiast te, które przeżyją, uzyskują częściową odporność i przy ponownym spryskiwaniu ginie ich tylko 20%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że gąsiennica zginie po pierwszym lub drugim spryskaniu?

17. W zbiorze stu monet jedna ma po obu stronach orły, pozostałe są prawidłowe. W wyniku pięciu rzutów losowo wybraną monetą otrzymaliśmy pięć orłów. Oblicz prawdopodobieństwo, że była to moneta z orłami po obu stronach.

18. W pewnej rodzinie mąż i żona zawarli następującą umowę: jeżeli któregoś dnia zmywa naczynia żona, to następnego dnia zmywa naczynia mąż, jeżeli natomiast pewnego dnia zmywa naczynia mąż, to o tym kto zmywa następnego dnia decyduje losowanie za pomocą rzutu monetą. Pierwszego dnia mąż zmywa z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że w trakcie pierwszych czterech dni trwania umowy, mąż zmywa naczynia dwa dni?

19. Wiadomo, że 5% (grupa 1) studentów umie odpowiedzieć na wszystkie pytania egzaminacyjne, 30% (grupa 2) umie odpowiedzieć na 70% pytań egzaminacyjnych, 40% (grupa 3) umie odpowiedzieć na 60% pytań egzaminacyjnych, 25% (grupa 4) umie odpowiedzieć na 50% pytań egzaminacyjnych. Z zespołu tego wybrano w sposób przypadkowy studenta. Obliczyć:

    (a) prawdopodobieństwo tego, że odpowie on na zadane pytanie,

    (b) prawdopodobieństwo warunkowe tego, że należy do grupy 2, jeśli stwierdzono, że odpowiedział na zadane pytanie.

20. Na 100 mężczyzn pięciu, a na 1000 kobiet dwie nie rozróżniają kolorów (są daltonistami). Z grupy o jednakowej liczbie mężczyzn i kobiet wybrano losowo osobę, która okazała się daltonistą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest to mężczyzna?

21. Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać z równorzędnym przeciwnikiem:

    (a) 3 partie z 4 partii, czy 5 z 8 partii?

    (b) nie mniej niż 3 partie z 4 partii, czy nie mniej niż 5 z 8 partii?

22. W szkole jest siedmiuset uczniów. Prawdopodobieństwo, że dzień urodzin losowo wziętego ucznia przypada na dowolny dzień roku jest równe $\frac{1}{365}$. Oblicz prawdopodobieństwo, ze pierwszego stycznia przypadają urodziny trzech uczniów.

23. W skutek przypadkowych zakłóceń przy jednym obrocie anteny radarowej obiekt będący w polu obserwacji pozostaje nie wykryty z prawdopodobieństwem p. Przyjmując, że wykrycia obiektu przy każdym pełnym obrocie anteny stanowią zdarzenia niezależne, oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że obiekt zostanie przynajmniej raz wykryty w ciągu n obrotów anteny.

24. Rzucamy kostką, aż do powtórzenia liczby oczek z pierwszego rzutu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A - wykonano jedenaście rzutów.

25. Rozkład zmiennej losowej X określa funkcja prawdopodobieństwa:

x_i	5	10	15	20
p_i	0,2	0,4	c	0,2

    (a) wyznaczyć stałą c,

    (b) wyznaczyć dystrybuantę zmiennej X,

    (c) wyznaczyć wartość oczekiwaną ($E(X)$),

    (d) wyznaczyć wariancję ($V(X)$).

26. Dystrybuanta zmiennej losowej X ma postać:

x	$(-\infty,-5)$	[-5,-3)	[-3,0)	[0,1)	[1,+∞)
$F(x)$	0	0,2	0,5	0,75	1

(a) wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa zmiennej X,

(b) wyznaczyć wartość oczekiwaną ($E(X)$),

(c) wyznaczyć wariancję ($V(X)$).

27. Rozkład skokowej zmiennej losowej X określony jest dystrybuantą:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 1 \\ 0,15 & \text{dla} \quad 1 \leq x < 3 \\ 0,25 & \text{dla} \quad 3 \leq x < 5 \\ 0,5 & \text{dla} \quad 5 \leq x < 7 \\ 0,8 & \text{dla} \quad 7 \leq x < 10 \\ 1 & \text{dla} \quad x \geq 10 \end{cases}$$

(a) wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa zmiennej X,

(b) wyznaczyć wartość oczekiwaną ($E(X)$),

(c) wyznaczyć wariancję ($V(X)$).

28. Robotnik obsługuje 3 maszyny. Prawdopodobieństwa tego, że w ciągu godziny maszyna nie będzie wymagać jego interwencji wynosi 0,6 dla pierwszej oraz 0,7 dla drugiej i trzeciej maszyny. Przy założeniu, że maszyny pracują niezależnie od siebie, wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa liczby X maszyn, które w ciągu godziny ich pracy nie wymagają interwencji robotnika. Ponadto wyznaczyć dystrybuantę, wartość oczekiwaną, wariancję oraz $P(X < 2)$.

29. Na drodze ruchu pociągów znajdują się w znacznej odległości od siebie 4 semafory, z których każdy (wobec znacznej odległości niezależnie od innych) zezwala na przejazd z prawdopodobieństwem $p = 0,8$. Niech X oznacza liczbę semaforów zezwalających na przejazd i poprzedzających pierwsze zatrzymanie lub stację docelową. Wyznaczyć funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, dystrybuantę, wartość oczekiwaną, wariancję, odchylenie standardowe oraz $P(X \geq 2)$.

30. Z urny zawierającej cztery kule oznaczone liczbami: -3; -1; 1; 3 losuje się dwie kule. Suma liczb na wylosowanych kulach jest zmienną losową. Obliczyć wartość oczekiwaną, wariancję i odchylenie standardowe tej zmiennej losowej.

31. Tarcza koła podzielona jest na 37 równych sektorów, numerowanych od 0 do 36. Gracz stawia na dowolny numer 10 zł., a następnie puszcz na tarczę kulkę. Jeżeli kulka zatrzyma się na numerze obstawionym przez gracza, to otrzymuje on swoją stawkę pomnożoną przez 36, jeżeli kulka nie zatrzyma się tam, to gracz traci swoją stawkę. Oblicz wartość oczekiwaną wygranej gracza.

32. Na zajęciach z matematyki nauczyciel powiadomił uczniów, ze wśród stopni z klasówki są: trzy oceny bardzo dobre, siedem dobrych, dziesięć dostatecznych i osiem niedostatecznych. Oblicz wartość oczekiwaną oceny z klasówki wiedząc, że w klasie jest trzydziestu uczniów, dwóch nie pisało pracy i ci otrzymują 0.

33. Gracz rzuca raz kostkę, jeżeli wypadnie szóstka, to ma prawo do jeszcze jednego rzutu dodatkowego. Oblicz wartość oczekiwaną liczby uzyskanych oczek.

34. Rzucamy kostką i określamy zmienną losową X równą liczbie otrzymanych oczek modulo 4. Oblicz $V(X)$ i $\sqrt{V(X)}$.

35. Zmienna losowa X ma rozkład $\{(-1, \frac{1}{4}), (0, \frac{1}{8}), (1, \frac{1}{4}), (2, \frac{3}{8})\}$. Znajdź rozkład zmiennej losowej Y, gdy (a) $Y = X - 7$, (b) $Y = 3X - 5$, (c) $Y = 2X^2 + 1$.

36. Zmienna losowa X ma rozkład $\{(-1, p - p^2), (0, p^2), (1, 1 - p)\}$. Dla jakich p, $E(X) < \frac{1}{4}$.

37. Zmienna losowa X ma rozkład $\{(0, p), (1, s), (2, 1 - p - s)\}$. Oblicz p oraz s wiedząc, że $E(X) = 1$ i $V(X) = \frac{1}{2}$.