Rekursja 2

Materiały pomocnicze do wykładu

wykładowca: **dr Magdalena Kacprzak**

Rozwiązywanie równań rekurencyjnych

Jednorodne liniowe równania rekurencyjne

Twierdzenie

Niech k będzie ustaloną liczbą naturalną dodatnią i niech (*) oznacza zależność rekurencyjną między wyrazami ciągu {a(n)}:

(*) $$a(n+k) = D_{k-1}a(n+k-1) + D_{k-2}a(n+k-2) + \ldots$$
$$+ D_1 a(n+1) + D_0 a(n)$$

gdzie D_0, ..., D_{k-1} są ustalonymi liczbami zespolonymi oraz niech a(0), a(1), ...,a(k-1) będą warunkami początkowymi.

Twierdzenie

Każdy ciąg {a(n)} spełniający dla $n \geq 0$ zależność (*) jest postaci

$$a(n) = \sum_{i=1}^{m} W_i$$

gdzie m oznacza liczbę różnych pierwiastków wielomianu charakterystycznego

$$P(x) = x^k - D_{k-1}x^{k-1} - D_{k-2}x^{k-2} - \ldots - D_1 x - D_0$$

Twierdzenie

Oznaczmy te pierwiastki przez z_1, ... z_m zaś ich krotności przez k_1, ... k_m odpowiednio. Wtedy W_i ma postać:

$$W_i = (z_i)^n (C_0 + C_1 n + \ldots + C_{p-1} n^{p-1} + C_p n^p)$$

gdzie $p=k_i-1$, zaś C_0, ..., C_{p-1}, C_p są ustalonymi liczbami zespolonymi.

Przykład

Rozważmy następujące jednorodne liniowe równanie rekurencyjne

$$a(0) = 0, \quad a(1) = 1, \quad a(2) = 2,$$

$$a(n+3) = a(n+2) + \frac{7}{4}a(n+1) + \frac{1}{2}a(n)$$

Przykład

Wtedy wielomian charakterystyczny tego równania ma postać

$$P(x) = x^3 - x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$$

Przykład

Ponieważ

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 (x - 2)$$

to pierwiastkami są

$x_1=-1/2$, $x_2=-1/2$, $x_3=2$

Przykład

Zatem

$$a(n) = (C_1 n + C_2)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_3 2^n$$

Przykład

Brakujące współczynniki wyznaczamy z układu trzech równań liniowych

$$\begin{cases} C_2 + C_3 = a(0) \\ \left(-\frac{1}{2}\right)(C_1 + C_2) + 2C_3 = a(1) \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 (2C_1 + C_2) + 4C_3 = a(2) \end{cases}$$

dla a(0)=0, a(1)=1, a(2)=2

Przykład

Ostatecznie

$C_1=4/5$, $C_2=-9/25$, $C_3=9/25$

a z tego rozwiązaniem rozważanego równania jest

$$a(n) = (\frac{4}{5}n - \frac{9}{25})\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{9}{25}2^n$$

Niejednorodne liniowe równania rekurencyjne

Redukcja do równań jednorodnych

Rozważmy następującą zależność rekurencyjną

$$a(n+k) = D_{k-1}a(n+k\text{ -}1) + \ldots + D_1 a(n+1) + D_0 a(n) + B$$

Zauważmy, że

$$a(n+k+1) = D_{k-1}a(n+k) + \ldots + D_1 a(n+2) + D_0 a(n+1) + B$$

Redukcja do równań jednorodnych

Odejmując stronami oba równania dostajemy

$$a(n+k+1) - a(n+k) =$$

$$D_{k-1}a(n+k) + (D_{k-2} - D_{k-1})a(n+k-1) + \ldots$$

$$+ (D_1 - D_2)a(n+2) + (D_0 - D_1)a(n+1) - D_0 a(n)$$

Redukcja do równań jednorodnych

Stąd

$$a(n+k+1) =$$
$$(D_{k-1}+1)a(n+k) + (D_{k-2} - D_{k-1})a(n+k-1) + \ldots$$
$$+ (D_1 - D_2)a(n+2) + (D_0 - D_1)a(n+1) - D_0 a(n)$$

Redukcja do równań jednorodnych

Zatem niejednorodne liniowe równanie rekurencyjne sprowadziliśmy do jednorodnego równania rekurencyjnego, którego rozwiązanie opisuje wielomian charakterystyczny

$$P(x) = x^{k+1} - (D_{k-1} + 1)x^{k} - (D_{k-2} - D_{k-1})x^{k-1} + \dots$$
$$- (D_1 - D_2)x^2 + (D_0 - D_1)x - D_0$$

Przykład

Rozważmy następujące niejednorodne liniowe równanie rekurencyjne

$$a(0)=1, \quad a(1)=1, \quad a(2)=\frac{13}{4}$$

$$a(n+2)=\frac{7}{4}a(n+1)+\frac{1}{2}a(n)+1$$

Przykład

Wówczas

$$a(n+2)=\frac{7}{4}a(n+1)+\frac{1}{2}a(n)+1$$

$$a(n+3)=\frac{7}{4}a(n+2)+\frac{1}{2}a(n+1)+1$$

Po odjęciu stronami dostajemy

$$a(n+3)=\left(\frac{7}{4}+1\right)a(n+2)+\left(\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\right)a(n+1)-\frac{1}{2}a(n)$$

Przykład

Wielomian charakterystyczny tego równania ma postać

$$P(x) = x^3 - \frac{11}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{2}$$

Przykład

Ponieważ

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)(x-1)(x-2)$$

to pierwiastkami są x=-1/4, x=1, x=2

Przykład

Zatem

$$a(n) = C_1\left(-\frac{1}{4}\right)^n + C_2 1^n + C_3 2^n$$

Przykład

Brakujące współczynniki wyznaczamy z układu trzech równań liniowych

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = a(0) \\ \left(-\frac{1}{4}\right) C_1 + C_2 + 2C_3 = a(1) \\ \left(-\frac{1}{4}\right)^2 C_1 + C_2 + 4C_3 = a(2) \end{cases}$$

dla a(0)=1, a(1)=1, a(2)=13/4

Przykład

Ostatecznie

$C_1=4/5,\ C_2=-4/5,\ C_3=1$

a z tego rozwiązaniem rozważanego równania jest

$$a(n)=\frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n-\frac{4}{5}+2^n$$

Funkcje tworzące

Definicja

Rozważmy ciąg liczbowy {a(n)}. Wówczas

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^{n}$$

nazywamy **zwykłą funkcją tworzącą**
lub krótko **funkcją tworzącą**.

Uwagi

Funkcje tworzące mają zatem postać

szeregów potęgowych.

Dla każdego takiego szeregu istnieje liczba rzeczywista $R \geq 0$, zwana

promieniem zbieżności,

taka że jeśli $|x|<R$, to jest on absolutnie zbieżny, a ponadto można go różniczkować i całkować wyraz po wyrazie dowolną liczbę razy.

Wzór Taylora

Zachodzi też wtedy wzór Taylora

$$a(n) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0,1,....$$

Uwagi

Niestety, gdy liczby a(n) są zbyt duże, wówczas R=0 i funkcje tworzące stają się bezużyteczne. Tak jest na przykład, gdy

$$a(n)=n!.$$

Nietrudno zauważyć, że szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^{n}$$

jest rozbieżny dla każdego x>0.

Wykładnicza funkcja tworząca

Aby ominąć ten problem, wprowadza się wykładniczą funkcję tworzącą

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) \frac{x^n}{n!}$$

której promień zbieżności jest zwykle dodatni.

Uwagi

Na przykład, jeśli a(n) jest liczbą wszystkich funkcji ze zbioru n-elementowego w siebie, czyli $a(n)=n^n$, to szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$$

jest rozbieżny dla każdego x>0,

Uwagi

ale szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n \frac{x^n}{n!}$$

jest zbieżny dla wszystkich $x<1/e$,

ponieważ $n^n<n!e^n$.

Uwagi

Wykładnicze funkcje tworzące stosuje się na ogół w przypadkach, o których wiemy lub spodziewamy się, że a(n) rośnie szybciej niż wykładniczo.

Od tej pory będziemy zakładać, że $|x|<R$.

Przykład 1

Rozważmy ciąg: 1,2,4,8,16,...

$$a(n)=2^n, \quad n=0,1,....$$

Wówczas funkcja tworząca ciągu $\{2^n\}$ dana jest wzorem: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n =$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n = 1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\ldots=\frac{1}{1-2x}$$

Przykład 2

Rozważmy ciąg: 1,2,3,4,5,...

a(n)=n+1, n=0,1,....

Wówczas funkcja tworząca ciągu {n+1} dana jest wzorem:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+1})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Przykład 3

Rozważmy ciąg: $\binom{k}{0}, \quad \binom{k}{1}, \quad \binom{k}{2}, \quad \binom{k}{3}, \quad ....$

$$a(n) = \binom{k}{n}, \quad n = 0,1,.....$$

Funkcja tworząca tego ciągu jest skończoną sumą i ma postać

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} x^{n} = (1+x)^{n}$$

Przykład 3

Innymi słowy, dwumian Newtona $(1+x)^k$ jest zwykłą funkcją tworzącą ciągu

$$\binom{k}{n}$$

określającego liczbę n-wyrazowych kombinacji zbioru k-elementowego.

Przykład 4

Z drugiej strony

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{k} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{x^n}{n!}$$

Tak więc $(1+x)^k$ jest jednocześnie wykładniczą funkcją tworzącą ciągu określającego liczbę n-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru k-elementowego.

Przykład 5

Funkcja

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k^n \frac{x^n}{n!} = e^{nx}$$

jest wykładniczą funkcją tworzącą dla liczby n-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru k-elementowego

Zastosowania

Rozwiązywanie równań rekurencyjnych

1. Postać rekurencyjna ciągu
2. Funkcja tworząca ciągu
3. Postać zwarta funkcji tworzącej
4. Rozwinięcie funkcji tworzącej w szereg Taylora
5. Postać jawna ciągu (współczynniki rozwinięcia funkcji tworzącej w szereg to kolejne wyrazy ciągu)

Proste na płaszczyźnie

Proste na płaszczyźnie

Na ile spójnych obszarów dzieli płaszczyznę n prostych, z których żadne dwie nie są równoległe i żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie?

Proste na płaszczyźnie

1. Układamy zależność rekurencyjną

Oznaczmy szukaną liczbę przez a(n). Mamy a(0)=1 i a(1)=2. Prowadząc n-tą prostą przetniemy wszystkie n-1 poprzednie, a to oznacza, że przetniemy na dwie części n obszarów spójnych, zwiększając tym samym liczbę obszarów o n.

Proste na płaszczyźnie

Zatem

$$a(n)=a(n-1)+n \quad \text{dla } n\geq 1$$

2. Określamy funkcję tworzącą

Niech f(x) będzie funkcją tworzącą tego ciągu. Wtedy

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n = a(0)x^0+\sum_{n=1}^{\infty}(a(n-1)+n)x^n$$

Proste na płaszczyźnie

3. Znajdujemy postać zwartą

$$f(x) = a(0)x^0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a(n-1)+n)x^n =$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}a(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{\infty}nx^n =$$

$$1+\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^{n+1} + x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} =$$

$$1+x\sum_{n=0}^{\infty}a(n)x^n + x(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)'=$$

Proste na płaszczyźnie

Stąd

$$1 + xf(x) + x(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)' =$$

$$1 + xf(x) + x(\frac{1}{1-x})' =$$

$$1 + xf(x) + x\frac{1}{(1-x)^2}$$

Proste na płaszczyźnie

Zatem

$$f(x) = 1 + xf(x) + x\frac{1}{(1-x)^2}$$

czyli

$$f(x)(1-x) = 1 + x\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)} + \frac{x}{(1-x)^3}$$

Proste na płaszczyźnie

4. Rozwijamy funkcję tworzącą w szereg

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^{n+1}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+1}{2} x^n$$

Proste na płaszczyźnie

5. Wyznaczamy postać jawną ciągu

Ostatecznie

$$a(n) = 1 + \binom{n+1}{2}$$

Proste na płaszczyźnie

Skorzystaliśmy tutaj z rozwinięcia Taylora

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$$

gdzie dla dowolnej liczby rzeczywistej r

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\ldots(r-n+1)}{n!}$$

Proste na płaszczyźnie

W szczególności

$$\binom{-3}{n} = (-1)^n \frac{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+2)}{n!} = (-1)^n \binom{n+2}{2}$$

stąd

$$\frac{x}{(1-x)^3} = x\frac{1}{(1-x)^3} = x(1-x)^{-3} = x(1-(-x))^{-3} =$$

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}(-1)^n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n+2}{2}(-1)^n x^n = x\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n$$

Wieża Hanoi

Wieża Hanoi

Niech $a(n)$ będzie minimalną liczbą ruchów niezbędną do przeniesienia wieży składającej się z n krążków.

1. Układamy zależność rekurencyjną

$$a(n)=2a(n-1)+1 \text{ oraz } a(1)=1$$

Wieża Hanoi

2. Określamy funkcję tworzącą

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^n =$$

$$a(1)x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (2a(n-1)+1)x^n =$$

$$1 \cdot x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a(n-1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 1 \cdot x^n$$

Wieża Hanoi

3. Znajdujemy postać zwartą

$$f(x) = x + 2x\sum_{n=2}^{\infty} a(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} x^{n} =$$

$$2x\sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^{n} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{n} =$$

$$2xf(x) + \frac{x}{1-x}$$

Wieża Hanoi

Stąd

$$f(x) = 2xf(x) + \frac{x}{1-x}$$

$$f(x)(1-2x) = \frac{x}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$$

Wieża Hanoi

4. Rozwijamy funkcję tworzącą w szereg

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-2x)} =$$

$$\frac{2x}{(1-2x)} - \frac{x}{(1-x)} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n - 1\right) x^n$$

Wieża Hanoi

5. Wyznaczamy postać jawną ciągu

$$a(n)=2^n-1$$

Podzbiory bez sąsiadów

Podzbiory bez sąsiadów

Ile podzbiorów zbioru

$$[n]=\{1,2,\ldots,n\},$$

wliczając zbiór pusty, nie zawiera sąsiednich liczb?

Podzbiory bez sąsiadów

1. Układamy zależność rekurencyjną

Oznaczmy szukaną liczbę przez a(n) i podzielmy wszystkie podzbiory tego typu na dwie klasy: te do których nie należy liczba 1, i te do których 1 należy.
Tych pierwszych jest tyle, ile podzbiorów bez sąsiadów zbioru {2,...,n}, a więc a(n-1).
Tych drugich jest tyle, ile podzbiorów bez sąsiadów zbioru {3,...,n}, a więc a(n-2).

Podzbiory bez sąsiadów

Zatem

$$a(n)=a(n-1)+a(n-2)$$

przy warunkach początkowych

$$a(0)=1 \text{ i } a(1)=2$$

Podzbiory bez sąsiadów

2. Określamy funkcję tworzącą

Dla a(0)=a(1)=1 funkcja tworząca ciągu Fibonacciego przyjmuje postać

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n =$$

$$a(0) + a(1)x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a(n-1) + a(n-2))x^n =$$

$$1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a(n-1) + a(n-2))x^n$$

Podzbiory bez sąsiadów

3. Znajdujemy postać zwartą

$$f(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a(n-1) + a(n-2))x^n =$$

$$1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a(n-1)x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a(n-2)x^n =$$

$$1 + x + \sum_{n=1}^{\infty} a(n)x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^{n+2} =$$

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^{n+2} = 1 + x\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} a(n)x^n =$$

$$1 + xf(x) + x^2 f(x)$$

Podzbiory bez sąsiadów

Stąd

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2} = \frac{a_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - a_1 x} - \frac{a_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}}{1 - a_2 x}$$

gdzie

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad a_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Podzbiory bez sąsiadów

4. Rozwijamy funkcję tworzącą w szereg

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)x^n$$

5. Wyznaczamy postać jawną ciągu

$$a(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Twierdzenie o rekursji uniwersalnej

Twierdzenie o rekursji uniwersalnej

Niech $a \geq 1$, $b > 1$ będą stałymi, $f: N \to R^+ \cup \{0\}$ pewną funkcją i niech $T(n)$ będzie równaniem rekurencyjnym postaci

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

gdzie n/b tratujemy jako $\lfloor n/b \rfloor$ albo $\lceil n/b \rceil$ wtedy

Twierdzenie o rekursji uniwersalnej

- jeżeli $f(n)=O(n^{\log[b]a-\varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon>0$, to

  $$T(n)=\Theta(n^{\log[b]a})$$

- jeżeli $f(n)=\Theta(n^{\log[b]a})$ dla pewnej stałej $\varepsilon>0$, to

  $$T(n)=\Theta(n^{\log[b]a}\lg n)$$

- jeżeli $f(n)=\Omega(n^{\log[b]a+\varepsilon})$ dla pewnej stałej $\varepsilon>0$, to

  $$T(n)=\Theta(f(n))$$

  pod warunkiem, że $af(n/b)\leq cf(n)$ dla pewnej stałej $c<1$ i wszystkich dostatecznie dużych n.

Przykład

Rozważmy równanie

$$T(n)=3T(n/3)+n^3+n.$$

Wówczas $a=3$, $b=3$, $f(n)=n^3+n$.

Zauważmy, że $f(n) = \Omega(n^{1+\varepsilon})$ dla $\varepsilon=2$.

Zatem

$$T(n)=\Theta(f(n))=\Theta(n^3+n)$$

Przyjmujemy, że $c=2/3$:

$$3f(n/3)=n^3/9+n \leq 2/3(n^3+n)=2/3f(n).$$

Zadania

Zadanie 1

Wyznaczyć liczbę a(n) ciągów binarnych długości n, w których żadne dwa zera nie występują obok siebie.

Zadanie 1

a(1)=2 – ciągi 1; 0

a(2)=3 – ciągi 01; 10; 11

a(3)=??

Zadanie 1

a(1)=2 – ciągi 1; 0

a(2)=3 – ciągi 01; 10; 11

a(3)=5 – ciągi 01**1**; 10**1**; 11**1**; 0**10**; 1**10**

a(n)=a(n-1)+a(n-2) dla n>2

Zadanie 1

Wielomian charakterystyczny tego równania ma postać

$$P(x) = x^2 - x - 1$$

Pierwiastkami tego wielomianu są

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{oraz} \qquad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Zadanie 1

Zatem

$$a(n) = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Zadanie 1

Brakujące współczynniki wyznaczamy z układu dwóch równań liniowych

$$\begin{cases} C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = a(1) \\ C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = a(2) \end{cases}$$

dla a(1)=2, a(2)=3

Zadanie 1

Ostatecznie

$$C_1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}} \qquad \text{oraz} \qquad C_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$$

a z tego rozwiązaniem rozważanego równania jest

$$a(n) = \left(\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Zadanie 2

Wyznaczyć liczbę a(n) ciągów ternarnych (złożonych z cyfr 0,1,2) długości n, w których żadne dwie jedynki nie występują obok siebie.

Zadanie 2

a(1)=3 – ciągi 2; 1; 0

a(2)=8 – ciągi 00; 01; 02; 10; 12;
20; 21; 22

a(3)=??

Zadanie 2

a(1)=3 – ciągi 2; 1; 0

a(2)=8 – ciągi 00; 01; 02; 10; 12;
20; 21; 22

a(3)=22 – ciągi

00**0**; 01**0**; 02**0**; 10**0**; 12**0**; 20**0**; 21**0**; 22**0**;

00**2**; 01**2**; 02**2**; 10**2**; 12**2**; 20**2**; 21**2**; 22**2**;

2**01**; 1**01**; 0**01**; 2**21**; 1**21**; 0**21**

Zadanie 2

$a(n)=2a(n-1)+2a(n-2)$ dla $n>2$

Zadanie 2

Wielomian charakterystyczny tego równania ma postać

$$P(x) = x^2 - 2x - 2$$

Pierwiastkami tego wielomianu są

$$x_1 = 1 + \sqrt{3} \qquad \text{oraz} \qquad x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

Zadanie 2

Zatem

$$a(n) = C_1\left(1+\sqrt{3}\right)^n + C_2\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

Zadanie 2

Brakujące współczynniki wyznaczamy z układu dwóch równań liniowych

$$\begin{cases} C_1\left(1+\sqrt{3}\right)^1 + C_2\left(1-\sqrt{3}\right)^1 = a(1) \\ C_1\left(1+\sqrt{3}\right)^2 + C_2\left(1-\sqrt{3}\right)^2 = a(2) \end{cases}$$

dla a(1)=3, a(2)=8

Zadanie 2

Ostatecznie

$$C_1 = \frac{3+2\sqrt{3}}{6} \qquad \text{oraz} \qquad C_2 = \frac{3-2\sqrt{3}}{6}$$

a z tego rozwiązaniem rozważanego równania jest

$$a(n) = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{6}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^n$$

Zadanie 3

Znaleźć postać jawną ciągu

(rozwiązanie zagadnienia wieży Hanoi)

$a(n)=2a(n-1)+1$ oraz $a(1)=1$, $a(2)=3$

Zadanie 3

Wyznaczamy

$a(n+1)=2a(n)+1$

$a(n+2)=2a(n+1)+1$

i odejmujemy stronami otrzymując

$a(n+2)-a(n+1)=2a(n+1)-2a(n)+1-1$

czyli

$a(n+2) =3a(n+1)-2a(n)$

Zadanie 3

Wielomian charakterystyczny tego równania ma postać

$$P(x) = x^2 - 3x + 2$$

Pierwiastkami tego wielomianu są

$$x_1 = 2 \qquad \text{oraz} \qquad x_2 = 1$$

Zatem

$$a(n) = C_1 2^n + C_2 1^n = C_1 2^n + C_2$$

Zadanie 3

Brakujące współczynniki wyznaczamy z układu dwóch równań liniowych

$$\begin{cases} C_1 2^1 + C_2 = a(1) \\ C_1 2^2 + C_2 = a(2) \end{cases}$$

dla a(1)=1, a(2)=3

Zadanie 3

Ostatecznie

$$C_1 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad C_2 = -1$$

a z tego rozwiązaniem rozważanego równania jest

$$a(n) = 2^n - 1$$