Elementy kombinatoryki

Materiały pomocnicze do wykładu

wykładowca: **dr Magdalena Kacprzak**

Reguła iloczynu

Reguła iloczynu

Jeśli pewną czynność wykonuje się w k-etapach, przy czym:

- etap 1 można wykonać n_1 sposobami,
- etap 2 – n_2 sposobami, ..., wreszcie
- k-ty etap – n_k sposobami,

to liczba N sposobów, jakimi można wykonać tę czynność, wyraża się wzorem:

$$N=n_1 \cdot n_2 \cdot .... \cdot n_k.$$

Przykład

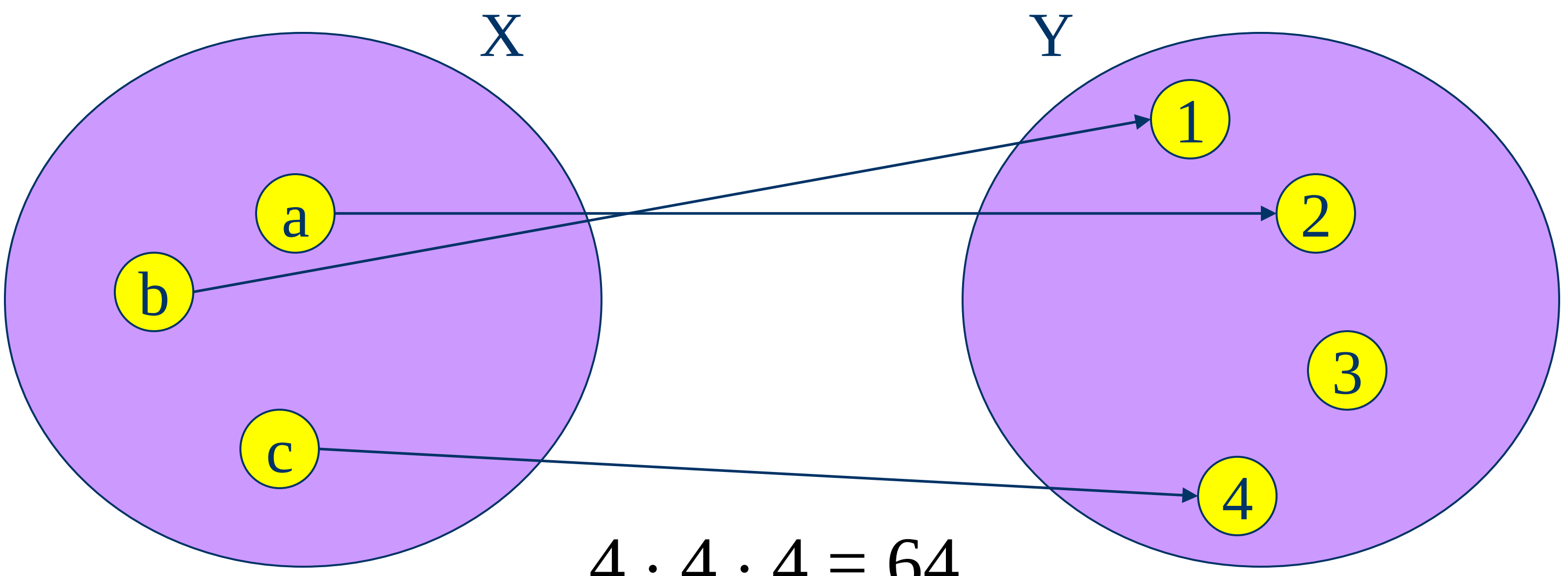
W jadłodajni są do wyboru 3 rodzaje zup,
4 rodzaje drugich dań i 2 rodzaje deserów.
Ile różnych 3-daniowych zestawów obiadowych można wybrać w tej jadłodajni?

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

Zliczanie funkcji

Problem

Ile można zdefiniować różnych funkcji całkowitych, określonych w zbiorze X i o wartościach w zbiorze Y?



$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Twierdzenie

Jeżeli $|X| = n$ i $|Y| = m$, to

$$|Y^X| = |Y|^{|X|} = m^n.$$

Problem

Ile jest ciągów 4-elementowych o elementach ze zbioru {0,1}?

1 lub 0	1 lub 0	1 lub 0	1 lub 0
2	2	2	2

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

Wniosek

Liczba różnych ciągów n elementowych o wyrazach ze zbioru m-elementowego wynosi m^n.

Wariacje

Definicja

Ciąg n-elementowy, którego wyrazy nie powtarzają się, nazywa się n wyrazową

wariacją bez powtórzeń.

Twierdzenie

Liczba n-wyrazowych wariacji bez powtórzeń w zbiorze m elementowym wynosi

$$V_m^n = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1), \quad n \leq m.$$

$$V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Przykład 1

Na ile sposobów można wylosować kolejno 5 kart bez zwracania z talii 52 kart?

52	51	50	49	48

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$$

Przykład 1

Na ile sposobów można wylosować kolejno 5 kart bez zwracania z talii 52 kart?

$$V_{52}^{5} = \frac{52!}{(52-5)!} = \frac{52!}{47!} = 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52$$

Przykład 2

Niech Σ będzie 7-literowym alfabetem. Ile jest słów w Σ^5, w których nie ma powtarzających się liter?

7 6 5 4 3

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Przykład 2

Niech Σ będzie 7-literowym alfabetem. Ile jest słów w Σ^5, w których nie ma powtarzających się liter?

$$V_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$$

Definicja

Ciąg n-elementowy, którego wyrazy mogą się powtarzać, nazywa się n wyrazową

wariacją z powtórzeniami.

Twierdzenie

Liczba n-wyrazowych wariacji z powtórzeniami w zbiorze m elementowym wynosi

$$\overline{V}_m^n = m^n$$

Przykład 1

Ile liczb 5-cyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2, 8?

3	3	3	3	3

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$$

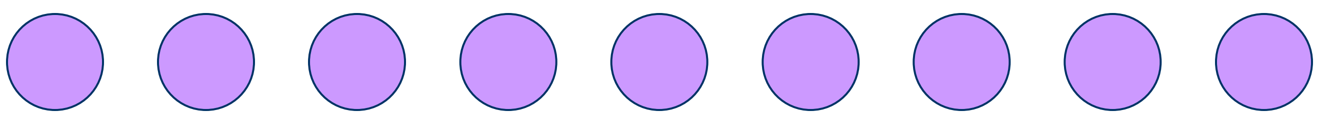
Przykład 1

Ile liczb 5-cyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2, 8?

$$\overline{V}_3^5 = 3^5$$

Przykład 2

Do 3 szuflad wrzucamy 9 kul. Na ile sposobów można rozmieścić te kule? (Kule i szuflady są rozróżnialne.)



3 3 3 3 3 3 3 3 3

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^9$$

Przykład 2

Do 3 szuflad wrzucamy 9 kul. Na ile sposobów można rozmieścić te kule? (Kule i szuflady są rozróżnialne.)

$$\overline{V}_3^9 = 3^9$$

Rozmieszczenia uporządkowane

Intuicje

Dany jest zbiór n obiektów i m pudełek,
w których będziemy je rozmieszczali.
Przy czym pozycja, na której znajduje się obiekt w pudełku jest dla nas istotna. O takich rozmieszczeniach mówimy, że są

uporządkowane.

Przykład

Ile jest różnych możliwych rozmieszczeń uporządkowanych 3 obiektów w 2 pudełkach?

Rozmieszczenia 3 obiektów w 2 pudełkach

abc		ca	b	c	ba
ab	c	bc	a	b	ac
ba	c	cb	a	b	ca
ac	b	c	ab	a	bc

Rozmieszczenia 3 obiektów w 2 pudełkach (c.d.)

a	cb	cab			bac
acb		cba			bca
bac			abc		cab
bca			acb		cba

Problem

Ile jest różnych możliwych rozmieszczeń uporządkowanych n obiektów w m pudełkach?

Rozwiązanie

Zauważmy, że pierwszy element możemy umieścić na m sposobów w dowolnym pudełku.

Drugi element możemy umieścić

- albo w jednym z pustych pudełek (czyli na m-1) sposobów
- albo w pudełku, w którym już jest jeden element, przed lub po nim.

Rozwiązanie

Ogólnie, jeśli już umieściliśmy (i-1) obiektów, a w pudełkach znajduje się odpowiednio $i_1, i_2, \ldots, i_m$ elementów (tzn. $i_1+i_2+ \ldots + i_m = i-1$), to i-ty element możemy włożyć

- do pierwszego pudełka na (i_1+1) sposobów : przed pierwszym elementem, przed drugim, albo przed trzecim... albo przed i_1-szym, albo na końcu,
- do drugiego pudełka na $(i_2 +1)$ sposobów, itd.
- do m-tego pudełka na (i_m+1) sposobów.

Rozwiązanie

Razem i-ty element można umieścić w pudełkach na

$$(i_1+1)+(i_2+1)+\ldots+(i_m+1)$$

sposobów, czyli (m + i - 1) sposobów.

Twierdzenie

Liczba rozmieszczeń uporządkowanych n elementów w m pudełkach wynosi

$$m \cdot (m+1) \cdot (m+2) \cdot \ldots \cdot (m+n-1).$$

Przykład

W banku są 3 okienka. Na ile sposobów 23 klientów może się ustawić w kolejkach przed okienkami?

$$3 \cdot (3+1) \cdot (3+2) \cdot \ \dots \ \cdot (3+23-1)$$

Permutacje

Definicja

Permutacją

n-elementowego zbioru X nazywamy dowolny ciąg n-elementowy o różnych wyrazach należących do zbioru X. Inaczej mówiąc, permutacja, to funkcja różnowartościowa ze zbioru $\{1,\ldots,n\}$ w zbiór X.

Twierdzenie

Liczba permutacji w dowolnym zbiorze n-elementowym wynosi:

$$P_n = n!$$

dla dowolnej liczby naturalnej n.

Przykład 1

Do biegu przystąpiło 6 zawodników o numerach 1,2,3,4,5,6. Za wynik biegu uważamy kolejność przybycia zawodników na metę.

Ile może być wyników biegu?

$$6!$$

Przykład 1

Do biegu przystąpiło 6 zawodników o numerach 1,2,3,4,5,6. Za wynik biegu uważamy kolejność przybycia zawodników na metę.

Ile może być wyników biegu przy założeniu, że pierwsze miejsce zajmie zawodnik z numerem 3?

$$5!$$

Przykład 2

Na ile sposobów można zakwaterować 4 osoby w 4 jednoosobowych pokojach?

$$4!$$

A w 5 pokojach?

$$5 \cdot 4!$$

Definicja

Niech X będzie zbiorem k różnych elementów, $X=\{x_1,\ldots,x_k\}$. **Permutacją n-elementową z powtórzeniami**, w której

- element x_1 powtarza się n_1 razy,
- .... ,
- element x_k powtarza się n_k razy,
- $n_1+\ldots+n_k=n$,

nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg, w którym poszczególne elementy zbioru X powtarzają się wskazaną liczbę razy.

Twierdzenie

Liczba wszystkich n-elementowych permutacji z powtórzeniami jest dana równością:

$$P_n^{n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$$

Przykład

Niech $\Sigma=\{a,b,c,d\}$. Ile jest słów o długości 8 złożonych z 2 liter a, 2 liter b, 3 liter c i jednej litery d?

$$P_8^{2,2,3,1} = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!}$$

Podziały uporządkowane

Definicja

Podziałem uporządkowanym zbioru S nazywamy ciąg $(A_1,\ldots,A_k)$, którego elementy $A_1,\ldots,A_k$ tworzą podział zbioru S. Nie zakładamy, że elementy zbiorów A_i są ustawione w jakiejś kolejności, istotna jest natomiast kolejność w jakiej występują same zbiory A_i.

Przykład

Niech S={1,2,3,4}.

Podziały {3,4},{1,2} i {1,2},{3,4} są różne.

Podziały {1,2,3},{4} i {1,3,2},{4} są nierozróżnialne.

Twierdzenie

Jeśli dany zbiór ma n elementów i jeśli $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ to istnieje

$$\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$$

podziałów uporządkowanych $(A_1,\ldots,A_k)$ tego zbioru takich, że $|A_i|=n_i$ dla $i=1,\ldots,k$

$$C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k}$$

Przykład

Na ile sposobów można podzielić dziewiętnaścioro studentów na 5 zespołów, w tym 2 zespoły po pięcioro i 3 zespoły po troje osób tak, że każdy zespół studiuje inny spośród 5 danych tematów?

$$\frac{19!}{5! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 3!}$$

Przykład

Na ile sposobów można podzielić dziewiętnaścioro studentów na 5 zespołów, w tym 2 zespoły po pięcioro i 3 zespoły po troje osób tak, że każdy zespół studiuje inny spośród 5 danych tematów?

$$C_{19}^{5} \cdot C_{14}^{5} \cdot C_{9}^{3} \cdot C_{6}^{3} \cdot C_{3}^{3}$$

Kombinacje

Symbol Newtona

Symbol Newtona $\binom{n}{k}$ definiujemy następująco:

$\binom{n}{0} = 1$ oraz $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ dla $k \geq 1$

Definicja

k-elementowe podzbiory zbioru
n-elementowego nazywamy
k-elementowymi

kombinacjami bez powtórzeń.

Twierdzenie

Liczba k-elementowych kombinacji bez powtórzeń w dowolnym zbiorze n-elementowym wynosi

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Przykład 1

Rozważmy graf bez pętli, który jest pełny (każda para wierzchołków połączona jest 1 krawędzią). Jeśli graf ma n ($n \geq 2$) wierzchołków, to ile ma krawędzi?

$$C_n^2$$

Przykład 2

Ile jest wszystkich ciągów długości n złożonych z zer i jedynek, w których występuje dokładnie r jedynek?

$$C_n^r$$

Własności symbolu Newtona

1. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$ dla n≥k

2. $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

3. $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Dowód własności 2

P = 2^n – liczba wszystkich podzbiorów zbioru n-elementowego (tzn. liczba zbiorów 0-elementowych + liczba zbiorów 1-elementowych +...+ liczba zbiorów n-elementowych). Zatem

$$P = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = L$$

Definicja

Rozważmy elementy n różnych rodzajów. Elementy tego samego rodzaju traktujemy jako identyczne. Każdy zbiór składający się z k elementów, gdy każdy element należy do jednego z tych n rodzajów, nazywamy k-elementową

kombinacją z powtórzeniami

z n rodzajów elementów.

Twierdzenie

Liczba k-elementowych kombinacji z powtórzeniami z elementów n rodzajów jest równa liczbie k-elementowych kombinacji bez powtórzeń z (n+k-1) elementów

$$\overline{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$$

Przykład

Na ile sposobów można utworzyć 6-kwiatową wiązankę mając nieograniczony zapas róż białych, czerwonych i różowych?

$$\overline{C}_3^6 = \binom{3+6-1}{6}$$

Zasada rozmieszczania przedmiotów w pudełkach

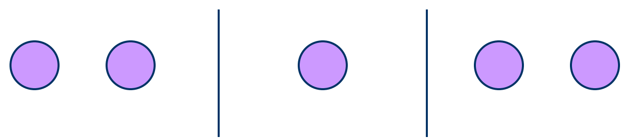
Jest

$$\binom{n+k-1}{n-1}$$

sposobów rozmieszczania k identycznych przedmiotów w n rozróżnialnych pudełkach.

Przykład 1

Ile jest ciągów, które mają 2 jedynki i 5 zer?



0010100

$$C_7^2 = \binom{7}{2} = \binom{5+3-1}{3-1}$$

Przykład 2

Na ile sposobów można rozmieścić 10 identycznych czerwonych kulek w 5 rozróżnialnych torbach?

$$\binom{5+10-1}{5-1} = \binom{14}{4} = 1001$$

Trójkąt Pascala

Trójkąt Pascala

Wartości symboli Newtona możemy ustawić w następującą tabelę mającą kształt trójkąta, zwaną trójkątem Pascala

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

Trójkąt Pascala

Ponieważ

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{oraz} \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n \in N$$

Więc wszystkie wyrazy skrajne w trójkącie Pascala są równe 1. Ponadto

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Każdy z pozostałych wyrazów jest sumą najbliższych dwóch wyrazów znajdujących się nad nim. Dzięki temu trójkąt Pascala łatwo odtworzyć z pamięci.

Trójkąt Pascala

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

....

Trójkąt Pascala

Każdą naturalną potęgę dwumianu (a+b) można wyrazić w postaci wzoru dwumianowego Newtona

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Trójkąt Pascala

Rozwinięcie potęgi $(a+b)^n$ zapisujemy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Przykład:

$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$