Rachunek predykatów

Materiały pomocnicze do wykładu

uczelnia: **PJWSTK**
przedmiot: **Matematyka Dyskretna**
wykładowca: **dr Magdalena Kacprzak**

Funkcje zdaniowe

Definicja

Niech X będzie niepustym zbiorem.

Funkcją zdaniową (predykatem) jednej zmiennej x, której zakresem zmienności jest przestrzeń X, nazywamy wyrażenie α**(x)**, w którym występuje zmienna x i które staje się zdaniem prawdziwym lub fałszywym, gdy w miejsce zmiennej x wstawimy dowolny obiekt ze zbioru X.

np.: $\alpha(x)=(x^2-1>0)$, $X = Z$

Przykłady

$\alpha(x)=(x \text{ ma cztery kąty})$,

$\alpha(x)=(\det(x)>0)$,

$\alpha(X)=(X\cap\{1,2\}=\varnothing)$,

$\alpha(x)=(|x|>2)$

Funkcja zdaniowa

Przestrzeń X może sama być produktem kartezjańskim zbiorów $X_1 \times \ldots \times X_n$.
Wtedy zmienna x przyjmuje jako wartości elementy tego produktu. Mówimy wówczas, że mamy do czynienia z funkcją zdaniową n-argumentową. Zwykle, dla uproszczenia zapisu, będziemy pisali $\alpha(x)$, rozumiejąc, że x może być jedną zmienną lub wektorem zmiennych.

np.: $\alpha(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2 - 3x_3 - 1>0)$

$X = R \times R \times R$

Przykłady

$$\alpha(X,Y)=(\det(X)=\det(Y)),$$

$$\alpha(X,Y,Z)=(X\cap Y=Z),$$

$$\alpha(x,y,z,t)=(x-y=z+t)$$

Formuły rachunku predykatów

Funkcje zdaniowe (predykaty) można łączyć spójnikami logicznymi. Powstają w ten sposób nowe, złożone funkcje zdaniowe.

Będziemy o nich mówili:

predykaty złożone lub

formuły rachunku predykatów.

Zatem, jeśli $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ są dowolnymi predykatami, to

$(\alpha(x) \wedge \beta(x))$, $(\alpha(x) \vee \beta(x))$, $(\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$, $\neg \beta(x)$

są predykatami złożonymi.

np.: $(x-1 = 0) \rightarrow (x > 0)$

Przykłady

$$(\det(X)=2) \wedge (\det(Y)<0) \to (X=Y),$$

$$(X \cap Y = Z) \vee (X \cup Y = Z),$$

$$(x-y>0) \to (z+t \neq 0)$$

Spełnianie funkcji zdaniowych

Definicja

Jeśli po wstawieniu elementu a w miejsce zmiennej x w predykacie $\alpha(x)$ określonym w pewnym zbiorze X otrzymujemy zdanie prawdziwe, to mówimy, że

element a spełnia
funkcję zdaniową $\alpha(x)$

lub, że funkcja zdaniowa $\alpha(x)$ jest spełniona przez element a w zbiorze X.

Przykłady

Element $a=10$ spełnia predykat $(x-2>0)$

Zbiór $\{1,4\}$ spełnia predykat $X \cap \{1,2\}=\{1\}$

Jakie elementy spełniają poniższe predykaty?

$(x^2 - y^2 > 0)$,

$(f \circ f = f)$,

$(A \subseteq B)$.

Oznaczenia

Czasami będziemy używali oznaczenia

$$\alpha(\mathbf{a/x})$$

dla zaznaczenia, że mamy do czynienia ze zdaniem, które powstało przez wstawienie konkretnej wartości a na miejsce zmiennej x.

Oznaczenia

Ogół tych wartości, dla których funkcja zdaniowa $\alpha(x)$ jest spełniona oznaczamy przez

$$\{x \in X : \alpha(x)\}$$

Dokładniej należałoby napisać

$\{a \in X : \alpha(a/x)$ jest zdaniem prawdziwym$\}$.

Wykres funkcji zdaniowej

Zbiór $\{x \in X : \alpha(x)\}$ nazywamy

wykresem funkcji zdaniowej.

Wyznacz wykres funkcji zdaniowej

$(x^2>2)$,

$(xy<0)$,

$(x^2+1=0)$,

$(x^3<0)$.

Lemat

Dla dowolnych funkcji zdaniowych $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ określonych w zbiorze X zachodzą następujące równości:

- $\{x \in X: \alpha(x)\} \cup \{x \in X: \beta(x)\} = \{x \in X : (\alpha(x) \vee \beta(x))\}$
- $\{x \in X: \alpha(x)\} \cap \{x \in X: \beta(x)\} = \{x \in X: (\alpha(x) \wedge \beta(x))\}$
- $- \{x \in X: \alpha(x)\} = \{x \in X: \neg \alpha(x)\}$.

Kwantyfikatory

Kwantyfikator ogólny

Zwroty:

"dla każdego x, $\alpha(x)$",

"dla wszystkich x, $\alpha(x)$",

"dla dowolnego x, $\alpha(x)$"

nazywamy

kwantyfikatorami ogólnymi

lub

uniwersalnymi.

Kwantyfikator ogólny

Oznaczają one zdanie prawdziwe, jeżeli niezależnie od tego jaka konkretna wartość a zostanie wstawiona na miejsce zmiennej w predykacie $\alpha(x)$, otrzymane zdanie $\alpha(a/x)$ będzie prawdziwe, tzn. wszystkie możliwe wartości zmiennej x spełniają funkcję zdaniową $\alpha(x)$

$$\forall x \, (\alpha(x))$$

Kwantyfikator szczegółowy

Zwrot

"istnieje takie x, że"

(czasami używany w formie "dla pewnego x")

nazywa się

kwantyfikatorem szczegółowym

lub

egzystencjalnym.

Kwantyfikator szczegółowy

Funkcja zdaniowa $\alpha(x)$ poprzedzona tym kwantyfikatorem tworzy zdanie prawdziwe, jeśli istnieje pewien obiekt a, który wstawiony w miejsce zmiennej w predykacie $\alpha(x)$ spowoduje, że otrzymamy zdanie prawdziwe $\alpha(a/x)$.

$$\exists x\,(\alpha(x))$$

Które zdania są prawdziwe?

$\forall f,g\ ((f \text{ jest } 1\text{-}1) \wedge (g \text{ jest } 1\text{-}1) \rightarrow (f \circ g \text{ jest } 1\text{-}1))$ TAK

$(\forall f)\ (\forall A,B)\ \ (f^{-1}(A \cup B)=f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B))$ TAK

$(\forall f)\ (\forall A)\ \ f^{-1}(f(A))=A$ NIE

Które zdania są prawdziwe?

$(\exists r \in \text{Relacje})$ (r jest symetryczna i przechodnia) TAK

$(\exists x)$ (x jest liczbą pierwszą i parzystą) TAK

$(\exists x)(x^2<0)$ NIE

Zmienna wolna i zmienna związana

Definicja

Zmienną x występującą w funkcjach zdaniowych

$(\forall x)\alpha(x)$ lub $(\exists x)\alpha(x)$

nazywamy

zmienną związaną

(dokładniej zmienną związaną przez kwantyfikator uniwersalny, w pierwszym przypadku, i zmienną związaną przez kwantyfikator egzystencjalny, w drugim przypadku).

Zakres kwantyfikatora

Funkcja zdaniowa $\alpha(x)$ występująca bezpośrednio po symbolu kwantyfikatora jest

zakresem tego kwantyfikatora,

tzn. ten kwantyfikator dotyczy wszystkich wystąpień zmiennej x w funkcji zdaniowej α.

Definicja

Jeśli jakaś zmienna nie jest związana przez żaden kwantyfikator, to mówimy, że jest to

zmienna wolna.

Uwaga

Jeśli w funkcji zdaniowej $\alpha(x)$ występuje tylko jedna zmienna wolna x, to wyrażenia

$$(\exists x)\alpha(x),\ (\forall x)\alpha(x)$$

są

zdaniami.

Przykłady

$$(\exists x)(x+y=2) \wedge (\forall z)(zx=y)$$

$$(\exists x)((x+y=2) \wedge (\forall z)(zx=y))$$

$$(\exists x)((x+y=2) \wedge (\forall z)(\forall y)(zx=y))$$

Spełnianie funkcji zdaniowych z kwantyfikatorami

Definicja

Zdane

$$\forall x\,(\alpha(x))$$

jest

prawdziwe

w X (tzn. wartością tego zdania jest 1) wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru X spełnia funkcję zdaniową $\alpha(x)$, tzn. gdy

$$\{x \in X: \alpha(x)\} = X.$$

Definicja

Zdanie

$$\exists x\,(\alpha(x))$$

jest

prawdziwe

w X (tzn. ma wartość 1) wtedy i tylko wtedy, gdy chociaż jeden element spełnia funkcję zdaniową $\alpha(x)$, tzn. jeśli

$$\{x \in X\colon \alpha(x)\} \neq \varnothing.$$

Wniosek

Dla dowolnego predykatu $\alpha(x)$ określonego w zbiorze X,

- $\forall x(\alpha(x))$ jest zdaniem **fałszywym** w X (tzn. ma wartość 0) wttw $\{x \in X: \alpha(x)\} \neq X$,
- $\exists x(\alpha(x))$ jest zdaniem **fałszywym** w X (tzn. ma wartość 0) wttw $\{x \in X: \alpha(x)\} = \emptyset$.

W jakich strukturach prawdziwe są te zdania?

$(\exists x)(x<0)$,

$(\forall y)(y>-1)$,

$(\exists x)(\forall y)(x<y)$,

$(\forall y)(\exists x)(x<y)$.

Definicja

Niech

$$\alpha(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

będzie funkcją zdaniową o zmiennych wolnych $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, których wartości należą odpowiednio do zbiorów $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Definicja

Powiemy, że ciąg $(a_1,a_2,\ldots, a_n) \in X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$

spełnia funkcję zdaniową

$\exists x\ (\alpha(x, x_1,x_2,\ldots x_n))$

wttw istnieje takie $a \in X$, że

$\alpha(a/x, a_1/x_1,a_2/x_2,\ldots, a_n/x_n)$

jest zdaniem prawdziwym.

Definicja

Element $(a_1,a_2,...,a_n) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$

spełnia funkcję zdaniową

$\forall \mathbf{x}(\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x_1},\mathbf{x_2},...\mathbf{x_n}))$

wttw dla dowolnego $a \in X$,

$\alpha(a/x,\ a_1/x_1,\ a_2/x_2,\ ...,\ a_n/x_n)$

jest zdaniem prawdziwym.

Kwantyfikatory a spójniki logiczne

Jeśli A jest skończonym zbiorem o elementach $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a, $\alpha(x)$ jest funkcją zdaniową określoną w zbiorze A, to prawdziwa jest następująca równoważność:

$$\boldsymbol{(\exists x)\, \alpha(x) \leftrightarrow (\alpha(a_1/x) \vee \alpha(a_2/x) \vee \ldots \vee \alpha(a_n/x))}$$

Analogicznie rozważmy kwantyfikator ogólny. Jeśli $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n\}$, a $\alpha(x)$ jest funkcją zdaniową określoną w zbiorze A, to prawdziwa jest następująca równoważność:

$$(\forall x)\ \alpha(x) \leftrightarrow$$
$$(\alpha(a_1/x) \wedge \alpha(a_2/x) \wedge \ldots \wedge \alpha(a_n/x))$$

Kwantyfikatory a działania uogólnione

Lemat

Niech $\alpha(x,y)$ będzie dowolną funkcją zdaniową określoną w przestrzeni $X \times Y$. Wtedy

- $\{x \in X : (\exists y)\ \alpha(x,y)\} = \bigcup_{y \in Y} \{x \in X : \alpha(x,y)$
- $\{x \in X : (\forall y)\ \alpha(x,y)\} = \bigcap_{y \in Y} \{x \in X : \alpha(x,y)\}$

Kwantyfikatory o zakresie ograniczonym

- Kwantyfikator ogólny o zakresie ograniczonym przez funkcje zdaniową $\beta(x)$ zapisujemy w postaci

$$(\forall\beta(x))$$

- Analogicznie, kwantyfikator szczegółowy o zakresie ograniczonym przez funkcję zdaniową $\beta(x)$ zapisujemy w postaci

$$(\exists\beta(x))$$

Lemat

Dla dowolnych funkcji zdaniowych α i β zachodzą następujące równoważności

- $(\forall\beta(x))\ \alpha(x) \leftrightarrow (\forall x)\ (\beta(x) \rightarrow \alpha(x))$
- $(\exists\beta(x))\ \alpha(x) \leftrightarrow (\exists x)\ (\beta(x) \wedge \alpha(x))$

Przykład

$$(\exists x)(x<0),$$

$$(\exists x \in R)(x<0),$$

$$(\exists x)(x \in R \rightarrow x<0).$$

Formalne przedstawienie rachunku predykatów

Oznaczenia

Niech

V_o - zbiór zmiennych zdaniowych,

V - zbiór zmiennych indywiduowych,

P - zbiór nazw relacji,

Φ - zbiór nazw funkcji.

Term

Zbiór termów jest to najmniejszy zbiór zawierający V i taki, że jeśli f jest nazwą funkcji n argumentowej, a $t_1, \ldots, t_n$ termami, to

$$f(t_1, \ldots, t_n)$$

jest

termem.

Zbiór formuł

Zbiór formuł jest to najmniejszy zbiór wyrażeń zawierających zbiór zmiennych zdaniowych V_0 i taki, że:

- jeśli r jest nazwą relacji n argumentowej, a $t_1, \ldots, t_n$ są termami, to $r(t_1, \ldots, t_n)$ jest formułą,
- jeśli α i β są formułami, to $\neg\alpha$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$, są formułami,
- jeśli $\alpha(x)$ jest formułą ze zmienną wolną x, to $(\exists x)\alpha(x)$ i $(\forall x)\alpha(x)$ są formułami.

Struktura algebraiczna i wartościowanie

Ustaloną interpretację symboli funkcyjnych i relacyjnych, będziemy nazywali

strukturą algebraiczną,

a ustalone wartości dla zmiennych

wartościowaniem.

Niech STR będzie pewną ustaloną strukturą algebraiczną. Oznaczmy przez $t_{STR}(v)$ wartość termu t przy interpretacji w strukturze STR i wartościowaniu v. Przyjmujemy następującą rekurencyjną definicję:

- $t_{STR}(v) = v(x)$, jeśli term t jest po prostu zmienną indywiduową x, oraz
- $t_{STR}(v) = f_{STR}(t_1(v),\dots, t_n(v))$, gdy t jest termem złożonym, postaci $f(t_1,\dots,t_n)$, a f_{STR} n-argumentową operacją w STR będącą interpretacją symbolu funkcyjnego f.

Pojęcie spełniania

Pojęcie spełniania definiujemy rekurencyjnie ze względu na postać formuły następująco:

- $STR,v|=p$ wttw $v(p)=1$, gdy p jest zmienną zdaniową,
- $STR,v|=r(t_1,\ldots,t_n)$ wttw $r_{STR}(t_{iSTR}(v),\ldots, t_{nSTR}(v))$ jest zdaniem prawdziwym

Pojęcie spełniania

- STR,v$|=\neg\ \alpha(x)$ wttw nie zachodzi STR, v $|= \alpha(x)$
- STR,v$|=(\alpha(x)\vee\beta(x))$ wttw STR,v$|=\alpha(x)$ lub STR, v$|=\beta(x)$
- STR,v$|=(\alpha(x)\wedge\beta(x))$ wttw STR,v$|= \alpha(x)$ i STR, v$|= \beta(x)$
- STR,v$|=(\alpha(x)\rightarrow\beta(x))$ wttw STR,v$|=\neg\alpha(x)$ lub STR,v$|= \beta(x)$

Pojęcie spełniania

- $STR,v|=(\forall x)\alpha(x)$ wttw $STR,v(a/x)|=\alpha(x)$ dla wszystkich $a\in STR$

- $STR,v|=(\exists x)\alpha(x)$ wttw $STR,v(a/x)|=\alpha(x)$ dla pewnego $a\in STR$.

Prawdziwość formuł

Powiemy, że formuła α jest

prawdziwa

w strukturze STR wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona spełniona przez każde wartościowanie w tej strukturze, tzn. gdy dla każdego v,

$$STR,v|=\alpha(x).$$

Fakt ten zapisujemy krótko STR$|=\alpha$.

Tautologie rachunku predykatów

Definicja

Formułę α rachunku predykatów nazywamy **tautologią** (lub prawem rachunku funkcyjnego), jeżeli jej wartością jest prawda, niezależnie od wartości zmiennych oraz interpretacji symboli relacyjnych i funkcyjnych w niej występujących, tzn. dla każdej struktury STR i dla każdego wartościowania v zmiennych w tej strukturze mamy STR, v $|=$ α.

Lemat

Jeśli α jest tautologią rachunku zdań,
to podstawiając za zmienne zdaniowe występujące w α dowolne formuły rachunku funkcyjnego otrzymujemy tautologię rachunku predykatów.

Lemat

Dla dowolnych formuł $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ następujące formuły są tautologiami rachunku predykatów:

1. $(\forall x)\ \alpha(x) \rightarrow (\exists x)\ \alpha(x)$
2. $(\neg(\forall x)\alpha(x)) \leftrightarrow ((\exists x)\neg\alpha(x))$ – prawo de Morgana
3. $(\neg(\exists x)\alpha(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\neg\alpha(x))$ – prawo de Morgana
4. $(\forall x)\ ((\alpha(x) \wedge \beta(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x))$
5. $(\exists x)(\alpha(x) \vee \beta(x)) \leftrightarrow ((\exists x)\alpha(x) \vee (\exists x)\beta(x))$

Dowód formuły 1

Dla przykładu podamy dowód dla formuły

$$(\forall x)\alpha(x)\rightarrow(\exists x)\alpha(x).$$

Gdyby ta implikacja była fałszywa przy pewnej interpretacji formuły $\alpha(x)$ w pewnej strukturze STR o niepustym uniwersum X, wtedy byłoby

$$\{x\in X\colon \alpha(x)\} = X \text{ oraz } \{x\in X\colon \alpha(x)\} = \emptyset.$$

Czyli $X=\emptyset$, sprzeczność.

Dowód formuły 2

Niech STR będzie ustaloną strukturą oraz v niech będzie pewnym wartościowaniem. Jeśli

$$STR, v \models \neg(\forall x)\alpha(x)$$

wtedy wartościowanie v nie spełnia formuły $(\forall x)\alpha(x)$. Oznacza to, że nie dla wszystkich a wstawionych w miejsce x w wartościowaniu v spełniona jest formuła $\alpha(x)$.

Dowód formuły 2

Oznaczmy taką wartość dla x przez b.

Mamy

$$STR, v(b/x) \models \neg\alpha(x).$$

Zatem, zgodnie z definicją semantyki dla kwantyfikatora egzystencjalnego mamy

$$STR, v \models ((\exists x)\ \neg\alpha(x)).$$

Reguły wnioskowania

Reguły dowodzenia

Reguły dowodzenia (inaczej reguły wnioskowania) są przekształceniami postaci

$$\frac{\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n}{\beta}$$

które pewnemu skończonemu zbiorowi formuł $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, przyporządkowują formułę β, w taki sposób, że dla dowolnej struktury danych STR takiej, że

STR $\models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$, mamy STR $\models \beta$.

Formuły $\alpha_1, \ldots,\alpha_n$ są nazywane **przesłankami** reguły, a formuła β jest nazywana **wnioskiem**.

Lemat

Dla dowolnej formuły $\alpha(x)$ i dowolnej formuły β, w której zmienna x nie występuje,

$$\frac{\alpha(x) \to \beta}{(\exists x)(\alpha(x)) \to \beta}$$

jest poprawną regułą dowodzenia.

Dowód

Przypuśćmy, że

(1) STR$|=$ ($\alpha(x) \rightarrow \beta$) oraz

(2) nie zachodzi STR$|=$ (($\exists x$) $\alpha(x) \rightarrow \beta$).

Wtedy z (2) dla pewnego wartościowania v mamy

STR,v$|=(\exists x)\alpha(x)$ i STR,v$|=\neg\beta$.

Stąd na mocy definicji semantyki kwantyfikatorów,

dla pewnego a$\in$STR,

STR,v(a/x)$|=\alpha(x)$, STR,v(a/x)$|=\neg\beta$

(ponieważ wartość zmiennej x nie ma wpływu na wartość formuły β).

Dowód

W konsekwencji

$$STR, v(a/x) \models \neg(\alpha(x) \rightarrow \beta).$$

Otrzymujemy sprzeczność z (1).
Wykazaliśmy tym samym, że z prawdziwości formuły postaci $(\alpha(x) \rightarrow \beta)$ wynika prawdziwość formuły $((\exists x)\alpha(x) \rightarrow \beta)$.

Lemat

Dla dowolnej formuły $\alpha(x)$,

$$\frac{\alpha(x)}{(\forall x)(\alpha(x))}$$

jest poprawną regułą dowodzenia

(reguła uogólniania).