Systemy algebraiczne

1. Czy zbiór $\{2^i : i \in \mathbb{N}\}$ jest zamknięty ze względu na dodawanie?
2. Niech A będzie niepustym zbiorem. Udowodnij, że zbiór wszystkich bijekcji ze zbioru A w A z operacją składania funkcji tworzy algebrę.
3. Udowodnij, że zbiory (a) $\{0,3\}$ i (b) $\{0,2,4\}$ tworzą podalgebry algebry $\mathbb{Z}_6 = \langle\{0,1,2,3,4,5\}, +_{mod6}, \times_{mod6}\rangle$, gdzie $a +_{mod6} b = (a+b) mod\ 6$, $a \times_{mod6} b = (a \times b) mod\ 6$.
4. Udowodnij, że algebra $\mathbb{Z}_4 =< \{0,1,2,3\}, +_{mod4} >$ jest izomorficzna z algebrą $< \{1,3,7,9\}, \times_{mod10} >$.
5. Udowodnić, że jeśli dwa dowolne skończone grafy są izomorficzne, to sumy rzędów wierzchołków tych grafów są takie same.
6. Udowodnij, że algebra $< \mathbb{R}, +, \ominus, 0 >$ jest izomorficzna z algebrą $< \mathbb{R}^+, \times, \otimes, 1 >$, gdzie operacje $+, \times$ są zwykłymi dwuargumentowymi operacjami dodawania i mnożenia liczb rzeczywistych, a operacje $\ominus$ i $\otimes$ są jednoargumentowymi operacjami określonymi następująco: $\ominus a = -a$, $\otimes b = b^{-1}$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^+$.
7. Niech h będzie funkcją odwzorowującą zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Z}$, $h(x) = 2x$ dla $0 \leqslant x$, $h(x) = -2x - 1$ dla $x < 0$. Wyznacz zbiór $h(\mathbb{Z})$. Zbadaj, czy h jest homomorfizmem odwzorowującym algebrę $< \mathbb{Z}, + >$ na algebrę $< h(\mathbb{Z}), + >$?
8. Zbadaj, czy relacja $\sim$ określona w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, $x \sim y$ wttw $|x| = |y|$, jest kongruencją w podanej algebrze. Jeśli odpowiedź jest twierdząca, wyznacz system ilorazowy. (a) $< \mathbb{R}, \times >$. (b) $< \mathbb{R}, + >$.
9. Udowodnij, że (a) zbiór $A = \{3^k : k \in \mathbb{N}\}$ jest podalgebrą algebry $< \mathbb{Z}, \times >$, (b) zbiór $B = \{3k : k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ jest podalgebrą algebry $< \mathbb{Z}, + >$. W każdym z rozważanych przypadków wyznacz zbiory generatorów.
10. Udowodnij, że odwzorowanie $h(x) = x+1$ jest izomorfizmem odwzorowującym algebrę $< \mathbb{Q}, \oplus, \otimes >$ w algebrę $< \mathbb{Q}, +, \times >$, gdzie operacje $\oplus$ i $\otimes$ są zdefiniowane następująco: $a \oplus b = (a + b + 1)$, $a \otimes b = a \times b + a + b$, dla dowolnych liczb wymiernych a, b.
11. Niech ρ będzie relacją równoważności w algebrze $\mathbf{A} =< A, (f_i)_{i \in I} >$, gdzie f_i jest operacją jednoargumentową w A, dla wszystkich i. Udowodnij, że jeżeli dla kazdego $a \in A$, $[a]$ jest podalgebrą algebry A, to ρ jest kongruencją w A. Wyznacz system ilorazowy $A/_\rho$.
12. Niech U będzie niepustym zbiorem i niech A będzie ustalonym podzbiorem U. W zbiorze $P(U)$ definiujemy relację $\sim_A$ następująco: $X \sim_A Y$ wttw $X \cup A = Y \cup A$, dla dowolnych $X, Y \in U$. Udowodnij, że $\sim_A$ jest kongruencją w algebrze zbiorów $< P(U), \cup, \cap >$. Wyznacz system ilorazowy.
13. Rozważmy system relacyjny $\langle \Sigma^*, o \rangle$, gdzie Σ^* jest zbiorem słów nad alfabetem Σ, a o jest operacją konkatenacji słów. Niech $\sim$ będzie relacją binarną taką, że $w \sim w'$ wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsze litery słów w i w' są identyczne. Udowodnij, że jest to relacja kongruencji i określ system ilorazowy.
14. Niech Σ będzie zbiorem cyfr w systemie dziesiętnym, $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Rozważmy algebrę
$$\Xi =< \Sigma \cup \mathbb{N}, push, pop, top, empty >,$$
gdzie

   $push(i, n) = (n + 1) \times 10 + i$

   $pop(n) = n\ div 10 - 1$

   $top(n) = n\ mod 10$

   $empty(n) = true$ wttw $n = 0$

   dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnej cyfry i. Zbadaj, czy podana struktura jest modelem nastepującego zbioru formuł.

   (a) $not\ empty(push(i, s))$

   (b) $not\ empty(s) \rightarrow push(top(s), pop(s)) = s$

   (c) $top(push(i, s)) = i$