# Rachunek predykatów

1. Zapisz następujące zdania za pomocą symboliki logicznej.
   (a) Liczba $x$ jest liczbą pierwszą.
   (b) Nie istnieje liczba, której kwadrat byłby mniejszy od 0.
   (c) Istnieje liczba naturalna $n$, taka że $kn = k$ dla wszystkich liczb całkowitych $k$.
   (d) Jeśli suma dwóch liczb pierwszych jest parzysta, to żadna z tych liczb nie jest równa 2.
   (e) Liczby całkowite $x$ i $y$ mają takie same dzielniki.
   (f) $x$ jest największym wspólnym dzielnikiem liczb $y$ i $z$.
   (g) W zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}$ nie istnieje liczba najmniejsza.
   (h) Dla dowolnych dwóch liczb rzeczywistych, jeżeli ich iloczyn jest mniejszy od zera, to jedna z tych liczb jest mniejsza od zera.
   (i) Pomiędzy dowolnymi dwoma różnymi liczbami podzielnymi przez 3 istnieje liczba podzielna przez 2.

2. Niech $X$ będzie zbiorem uporządkowanym przez relację $r$ i niech $A$ będzie podzbiorem $X$. Zapisz następujące zdania w postaci formuł rachunku predykatów.
   (a) $x$ jest kresem dolnym zbioru $A$.
   (b) Każdy element maksymalny jest elementem minimalnym w zbiorze uporządkowanym $(X, r)$.
   (c) $x$ jest elementem największym w zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, r)$.
   (d) W zbiorze częściowo uporządkowanym $(X, r)$ nie istnieją dwa różne elementy najmniejsze.

3. Określ, które zmienne w następujących wyrażeniach są wolne, a które związane.
   (a) $(\forall x)(\exists y)((xy = xz) \to (y = z))$,
   (b) $(\forall x)(x < 0 \to (xy > 0 \vee (\exists z)(x + z = y)))$,
   (c) $(\forall x)(x \in \mathbb{R} \to (x = 2^y)) \wedge (xy > 0 \vee (\forall z)(z \in \mathbb{R} \to (xyz < 0)))$.

4. Znajdź wykresy poniższych funkcji zdaniowych w strukturze liczb rzeczywistych.
   (a) $0 < x^2 + y^2 \leqslant 4$,
   (b) $xy < 0 \to x < 0$,
   (c) $|x| + |y| \leqslant 1$,
   (d) $(\forall x)(\max(\{x, y\}) = x)$,
   (e) $(\exists x)(\min(\{x, y\}) = y)$,
   (f) $(\forall x)(\forall y)(x^2 + y^2 > z)$,
   (g) $(\exists x)(\exists y)(x^2 + y^2 \leqslant z)$,
   (h) $(\forall x)(\exists y)(z < x + y < t)$.

5. Rozważmy następujące formuły w strukturze liczb rzeczywistych. Zapisz zaprzeczenia tych zdań nie używając spójnika negacji.
   (a) $(\forall x)(\forall y)((x^2 = y) \to (\exists z)(x \leqslant z \leqslant y))$,
   (b) $(\exists x)((\forall y)(x > y \to (\exists z)(z < x \vee z < y)))$.

6. Podaj wartości logiczne poniższych wyrażeń.
   (a) $(\forall x)(\sqrt{x^2} = x)$ jeśli dziedziną jest zbiór $\mathbb{Z}$,
   (b) $(\forall m)(\exists n)(2m = n)$ jeśli dziedziną jest zbiór $\mathbb{N}$,
   (c) $(\exists x \in \mathbb{N})(x = 5 + 4x)$,

(d) $(\forall n)(\exists k)(2^n = k)$ jeśli dziedziną jest zbiór $\mathbb{N}$,

(e) $(\forall n)(\exists k)((n \in \mathbb{N} \wedge k \in \mathbb{N}) \to (n = 2^k))$ jeśli dziedziną jest zbiór $\mathbb{N}$,

(f) $(\forall x)(\exists y)((x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}) \to (x > y))$,

(g) $(\exists y)(\forall x)(x < y)$ jeśli dziedziną jest zbiór $\mathbb{R}$,

(h) $(\exists r \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(r < n)$,

(i) $(\exists k \in \mathbb{Z})(\exists s \in \mathbb{R})((k + 2s = -1) \wedge (2k - s = -14))$.

7. Sprawdź, czy zdanie $\forall x \exists y ((x^2 + 1)y = 1)$ jest prawdziwe jeśli dziedziną jest zbiór: (a) $\mathbb{N}$, (b) $\mathbb{Q}$, (c) $\mathbb{R}$.

8. Podaj przykład formuły rachunku predykatów, która

   (a) jest prawdziwa w strukturze liczb naturalnych i nie jest prawdziwa w strukturze liczb rzeczywistych,

   (b) jest prawdziwa w strukturze liczb rzeczywistych i nie jest prawdziwa w strukturze liczb naturalnych.

9. Zbadaj prawdziwość podanych formuł rachunku kwantyfikatorów w strukturze liczb naturalnych i w strukturze liczb całkowitych.

   (a) $(\exists x)(\forall y)(x \leqslant y)$,

   (b) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x + z = y)$,

   (c) $(\forall x)(\forall y)(x^2 = y^2 \to x = y)$,

   (d) $(\forall x)(\exists y)(x^2 > y^2 \to x > y)$,

   (e) $(\forall m)(\exists n)(2m = n)$,

   (f) $(\forall n)(\exists k)(2^n = k)$.

10. Dla każdej z formuł sprawdź, czy istnieje struktura i takie funkcje zdaniowe $p$, $q$ w niej określone, by otrzymane zdanie było w tej strukturze prawdziwe.

   (a) $(\forall a)(\exists b)(\exists c)(p(a, b) \to q(b, c))$,

   (b) $(\forall a)(\forall b)(p(a, b) \to (\exists c)q(a, b, c))$,

   (c) $((\forall a)p(a) \vee (\forall a)q(a)) \wedge (\exists a)(\neg p(a) \wedge \neg q(a))$,

   (d) $(\forall a)(p(a) \to q(a)) \wedge \neg(\exists a)(\neg p(a)) \wedge (\exists a)(\neg q(a))$.

11. Udowodnij, że dla dowolnych formuł $\alpha$ i $\beta$ podane formuły są tautologiami rachunku predykatów.

   (a) $\neg(\exists x)\alpha(x) \leftrightarrow (\forall x)(\neg\alpha(x))$ - prawo de Morgana,

   (b) $\neg(\forall x)\alpha(x) \leftrightarrow (\exists x)(\neg\alpha(x))$ - prawo de Morgana,

   (c) $(\forall x)(\alpha(x) \to \beta(x)) \to ((\forall x)\alpha(x) \to (\forall x)\beta(x))$,

   (d) $(\forall x)\alpha(x) \vee (\forall x)\beta(x) \to (\forall x)(\alpha(x) \vee \beta(x))$,

   (e) $(\exists x)(\forall y)\alpha(x, y) \to (\forall y)(\exists x)\alpha(x, y)$,

   (f) $(\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \to ((\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x))$.

12. Niech $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ będą dowolnymi formułami rachunku predykatów, w których $x$ jest zmienną wolną oraz $\gamma(x, y)$ będzie formułą rachunku predykatów, w której $x$ i $y$ są zmiennymi wolnymi. Sprawdź, czy podane formuły są tautologiami rachunku kwantyfikatorów.

   (a) $(\exists x)\alpha(x) \wedge (\exists x)\beta(x) \to (\exists x)(\alpha(x) \wedge \beta(x))$,

   (b) $(\exists x)(\exists y)\gamma(x, y) \to (\exists x)\gamma(x, x)$,

   (c) $(\forall x)(\alpha(x) \to \beta(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\alpha(x) \to (\forall x)\beta(x))$.

13. Niech $s(x, y, z)$ i $p(x, y, z)$ będą dwoma trójargumentowymi predykatami. W strukturze $STR$, której uniwersum jest zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$, predykaty $s$ i $p$ są interpretowane następująco: dla dowolnych liczb naturalnych $a, b, c$,

$$s(a, b, c) = 1 \text{ wttw } a + b = c$$

oraz

$$p(a, b, c) = 1 \text{ wttw } ab = c.$$

Na przykład formuła $(\forall y)s(y, x, y)$ ma tylko jedną zmienną wolną $x$ i w strukturze $STR$ jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy wartością zmiennej $x$ jest zero.

(a) Skonstruuj formułę z jedną zmienną wolną $x$, która jest prawdziwa w strukturze $STR$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 1$.

(b) Skonstruuj formułę z jedną zmienną wolną $x$, która jest prawdziwa w strukturze $STR$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 2$.

(c) Skonstruuj formułę z jedną zmienną wolną $x$, która jest prawdziwa w strukturze $STR$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x$ jest liczbą parzystą.

(d) Skonstruuj formułę z jedną zmienną wolną $x$, która jest prawdziwa w strukturze $STR$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x$ jest liczbą nieparzystą.

(e) Skonstruuj formułę z jedną zmienną wolną $x$, która jest prawdziwa w strukturze $STR$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x$ jest liczbą pierwszą.

(f) Skonstruuj formułę z dwoma zmiennymi wolnymi $x, y$, która jest prawdziwa w strukturze $STR$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < y$.

(g) Skonstruuj formułę z dwiema zmiennymi wolnymi $x$, $y$, która jest prawdziwa w strukturze $STR$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x$ jest dzielnikiem $y$.