Prawdopodobieństwo całkowite

Jeżeli zdarzenia $B\_{1}, B\_{2},…B\_{n}$ wykluczają się parami i mają prawdopodobieństwa dodatnie, to dla każdego zdarzenia $A$ zawartego w sumie zdarzeń$B\_{1}∪B\_{2}∪….∪B\_{n}$:

$$P\left(A\right)= \sum\_{i=1}^{n}P\left(B\_{i}\right)P\left(B\_{i}\right)= P\left(B\_{1}\right)P\left(B\_{1}\right)+ …+P\left(B\_{n}\right)P(B\_{n})$$

Powyższy wzór nazywamy wzorem na prawdopodobieństwo całkowite i pozwala nam na obliczanie prawdopodobieństw wielu zdarzeń nie tylko w doświadczeniach dwuetapowych. W doświadczeniach o większej liczbie etapów stosujemy ten wzór wielokrotnie. Zdarzenia Bi nazywamy często hipotezami. Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym można zilustrować za pomocą tzw. drzewa stochastycznego.

****

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite to suma iloczynów po wszystkich drogach, które kończą się w A. Drzewo stochastyczne zaczyna się początkiem, w węzłach drzewa umieszczamy wyniki kolejnych etapów doświadczenia. Węzły łączymy krawędziami . Obok każdej krawędzi dopisujemy prawdopodobieństwo otrzymania wyniku danego etapu. Suma prawdopodobieństw przyporządkowanych krawędziom wychodzącym z jednego węzła jest równa 1. Dowolny ciąg krawędzi łączący początek drzewa z jednym z końcowych węzłów nazywamy gałęzią drzewa. Każdej gałęzi odpowiada jeden wynik doświadczenia wieloetapowego. Prawdopodobieństwo wyniku odpowiadającego danej gałęzi drzewa równa się iloczynowi prawdopodobieństw przypisanych krawędziom, z których jest złożona gałąź (jest to tzw. reguła mnożenia dla drzew).

Twierdzenie Bayesa

**Twierdzenie Bayesa** (od nazwiska [Thomasa Bayesa](http://pl.wikipedia.org/wiki/Thomas_Bayes)) to [twierdzenie](http://pl.wikipedia.org/wiki/Twierdzenie) [teorii prawdopodobieństwa](http://pl.wikipedia.org/wiki/Teoria_prawdopodobie%C5%84stwa), wiążące [prawdopodobieństwa warunkowe](http://pl.wikipedia.org/wiki/Prawdopodobie%C5%84stwo_warunkowe) zdarzeń $A|B$ oraz $B|A$. Na przykład, jeśli ***A*** jest zdarzeniem "u pacjenta występuje wysoka gorączka", a ***B*** jest zdarzeniem "pacjent ma grypę", twierdzenie Bayesa pozwala przeliczyć znany odsetek gorączkujących wśród chorych na grypę $P(A|B)$ i znane odsetki gorączkujących $P(A)$ i chorych na grypę $P\left(B\right)$w całej populacji, na prawdopodobieństwo, że ktoś jest chory na grypę, gdy wiemy, że ma wysoką gorączkę $P(B|A)$. Twierdzenie stanowi podstawę teoretyczną [sieci bayesowskich](http://pl.wikipedia.org/wiki/Sie%C4%87_bayesowska), stosowanych w [data mining](http://pl.wikipedia.org/wiki/Data_mining).

Wzór Bayesa

Jeżeli zdarzenia $T\_{1}, T\_{2},…T\_{n}$ wykluczają się parami i mają prawdopodobieństwa dodatnie, to dla każdego zdarzenia $A$ zawartego w sumie zdarzeń $T\_{1}∪T\_{2}∪….∪T\_{n}$:

$$P\left(X\right)= \frac{P(T\_{i})∙P(X|T\_{i})}{P(X)}$$

$$P\left(X\right)= \frac{P(T\_{i})∙P(X|T\_{i})}{P\left(T\_{1}\right)∙P\left(T\_{1}\right)+ P\left(T\_{2}\right)∙P\left(T\_{2}\right)+…+P\left(T\_{n}\right)∙P(X|T\_{n})}$$

Powyższy wzór nazywamy wzorem Bayesa. Twierdzenie Bayesa stosujemy głównie wtedy, gdy znamy wynik doświadczenia i pytamy o jego przebieg.

Dowód

skoro

$$P\left(T\right)= \frac{P(X∩T)}{P(T)}$$

$$P\left(X∩T\right)=P\left(T\right)∙P\left(T\right)$$

A

$$P\left(X∩T\right)=P\left(T∩X\right)$$

to

$$P\left(X∩T\right)= P\left(T\right)∙P\left(T\right)=P\left(X\right)∙P(T|X)$$

więc

$$P\left(T\right)∙P\left(T\right)= P\left(X\right)∙P(T|X)$$

$$P\left(X\right)= \frac{P\left(T\right)∙P(X|T)}{P(X)}$$

Zadania

1. Żarówki pewnej marki są produkowane w dwu fabrykach *X* i *Y*. Żarówki z fabryki *X* działają dłużej niż 5000 godzin w 99% procentach przypadków, żarówki z fabryki *Y* tylko w 95% przypadków. Fabryka *X* dostarcza na rynek 60% żarówek tej marki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zakupiona losowo żarówka będzie sprawna dłużej niż 5000 godzin?

odp.:

$$P\left(B\_{1}\right)= 0.6$$

$$P\left(B\_{2}\right)= 0.4$$

$$P\left(B\_{1}\right)= 0.99$$

$$P\left(B\_{2}\right)= 0.95$$

$$P\left(A\right)=0.6∙0.99+0.4∙0.95=0.974$$

1. Przez pewną miejscowość przejeżdża 4 razy więcej samochodów osobowych niż ciężarowych. Wiadomo, że jeden na 75 samochodów osobowych i jeden na 25 samochodów ciężarowych tankuje paliwo w tej miejscowości. Oblicz prawdopodobieństwo ze przejeżdżający samochód zatankuje paliwo.

odp.:

$$P\left(B\_{1}\right)=0.8$$

$$P\left(B\_{2}\right)=0.2$$

$$P\left(B\_{1}\right)= \frac{1}{75}$$

$$P\left(B\_{2}\right)= \frac{1}{25}$$

$$P\left(A\right)= \frac{1}{75}∙0.8+ \frac{1}{25}∙0.2= 0.019$$

1. W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, a w drugiej są 4 czarne i 1 biała. Rzucamy kostką. Jeżeli wypadną mniej niż 3 oczka, to losujemy kulę z pierwszej urny, w przeciwnym wypadku losujemy kulę z drugiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

odp.:

$$P\left(B\_{1}\right)= \frac{1}{3}$$

$$P\left(B\_{2}\right)= \frac{2}{3}$$

$$P\left(B\_{1}\right)= \frac{3}{5}$$

$$P\left(B\_{2}\right)= \frac{1}{5}$$

$$P\left(A\right)= \frac{3}{15}+\frac{2}{15}=\frac{1}{3}$$

1. Stacja meteorologiczna zbiera informacje dotyczące szansy wystąpienia dnia deszczowego. Wedle uzyskanych danych, jeśli danego dnia pada, to szansa, że następny dzień także będzie deszczowy wynosi 50%, jeśli zaś dany dzień jest słoneczny, to kolejny dzień jest deszczowy w 30% przypadków. Synoptycy przepowiadają, na 80%, najbliższy poniedziałek jako dzień deszczowy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że środa będzie deszczowa?

Odp.:

$$P\left(A\right)= 0.8 ∙0.5 ∙0.5+0.8∙0.5∙0.3+0.2 ∙0.3∙0.5+0.2 ∙0.7∙0.3=0.392 $$

1. Pewna firma wiedząc, że 0,5% z jej pracowników to narkomani, postanowiła przeprowadzić test anty-narkotykowy. Jakie jest prawdopodobieństwo prawidłowego wykrycia narkomana, jeżeli wiadomo, że test ma 99% skuteczności (w 1% przypadków test wypada pozytywnie u osoby nie zażywającej, a negatywnie u narkomana)?

odp.:

Zdarzenie D – dana osoba jest narkomanem

Zdarzenie N – dana osoba nie jest narkomanem

Zdarzenie + - test dał wynik pozytywny

Zdarzenie - - test dał wynik negatywny

P(D) = 0.005

P(N) = 1 – P(D) = 0.995

P(+|D) = 0.99

P(-|N) = 0.99

P(+|N) = 1 – P(-|N) = 0.01

$$P\left(+\right)= \frac{P\left(D\right)∙P(D)}{P(+)}=\frac{P(+D)∙P(D)}{P\left(D\right)∙P\left(D\right)+ P\left(N\right)∙P(N)}=0,3322$$

1. W urnach o numerach 1-9 znajdują się 4 kule białe i 6 czarnych, natomiast w urnie nr 10 jest 10 kul białych i 10 czarnych. Z losowo wybranej urny wylosowano 2 kule i okazały się białe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zostały wylosowane z 10 urny.

ODP.:

$A$- wylosowanie 2 kul białych

$B\_{1}$- wybranie jednej z urn 1-9

$B\_{2}$- wybranie urny 10

$$P\left(B\_{1}\right)= 0,9$$

$$P\left(B\_{2}\right)= 0,1$$

$$P\left(B\_{1}\right)= \frac{6}{45}$$

$$P\left(B\_{2}\right)= \frac{45}{190}$$

$$P\left(A\right)= \frac{P(A|B\_{2})∙P(B\_{2})}{P(A)}=\frac{\frac{9}{38}∙0,1}{0,9∙\frac{6}{45}+0,1∙\frac{45}{190}}=\frac{9}{380}∙\frac{1900}{273}=0,165$$

1. W zbiorze 100 monet jedna ma po obu stronach orły, a pozostałe są prawidłowe. Rzucono 10-krotnie jedną losowo wybraną monetą i otrzymano 10 orłów. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że była to moneta z dwoma orłami.

odp.:

A – moneta normalna

B – moneta z dwoma orłami

C – 10 orłów

P(A) = 0.99

P(B) = 0.01

$$P\left(A\right)= \left(\begin{matrix}10\\10\end{matrix}\right)∙\frac{1}{2}^{10}∙\frac{1}{2}^{0}=\frac{1}{1024}$$

$$P\left(B\right)= 1$$

$$P\left(C\right)=\frac{0.01 ∙1}{0,01∙1+0.99∙\frac{1}{1024}}=0,91$$

1. Test na rzadką chorobę, którą dotknięta jest średnio jedna osoba na 1000, daje tak zwaną fałszywą pozytywną odpowiedź u 5% zdrowych (u chorego zawsze daje odpowiedź pozytywną). Jaka jest szansa, że osoba, u której test dał odpowiedź pozytywną, jest faktycznie chora?

odp.:

A – osoba jest chora

B – osoba jest zdrowa

+ - wynik testu pozytywny

- - wynik testu negatywny

P(A) = 0.001

P(B) = 1 – P(A) = 0.999

P(+|A) = 1

P(+|B) = 0.05

$$P\left(+\right)= \frac{P\left(A\right)∙P(+|A)}{P\left(A\right)∙P\left(A\right)+ P\left(B\right)∙P(+|B)}=\frac{0.001}{0.001+0.05∙0.999}=0,2$$

1. 5 mężczyzn na 100 oraz 25 na 1000 kobiet jest daltonistami. Losowo wybrano osobę i okazało się, że nie odróżnia ona kolorów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że był to mężczyzna? (ilość kobiet i mężczyzn jest równa)

odp.:

$$P\left(A|B\_{1}\right)= 0.05$$

$$P\left(A|B\_{2}\right)= 0.025$$

$$P\left(A\right)= \frac{0.05}{0.05+0.025}=\frac{2}{3}$$

1. Pewne urządzenia są sprowadzane od 3 dostawców: A, B, C w ilościach odpowiednio: 50%, 20%, 30%. Wadliwość urządzeń: A – 1%, B – 2%, C – 3%. Wybrane urządzenie jest wadliwe. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pochodzi ono od dostawcy A?

odp.:

$$P\left(A\right)=\frac{1}{2}$$

$$P\left(B\right)=\frac{1}{5}$$

$$P\left(C\right)=\frac{3}{10}$$

$$P\left(A\right)= 0.01$$

$$P\left(B\right)= 0.02$$

$$P\left(C\right)= 0.03$$

$$P\left(X\right)= \frac{\frac{1}{2}∙0.01}{\frac{1}{2}∙0.01+\frac{1}{5}∙0.02+ \frac{3}{10}∙0.03}=0,28$$

1. Prawdopodobieństwo wybuchu gazu w kopalni wynosi 0,025. W kopalni jest zainstalowany system alarmowy, który w sytuacji zagrożenia zawodzi w 12% przypadków. Fałszywy alarm zdarza się w 15% przypadków. Załóżmy, że włącza się alarm. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jest on fałszywy?

odp.:

$$P\left(A\right)= 0.025$$

$$P\left(A|B\_{1}\right)= 0.12$$

$$P\left(A|B\_{2}\right)= 0.15$$

$$P(B\_{1}|A)= \frac{0.975 ∙0,15}{0.975∙0.15+0.025∙0.12}=0,9799$$

1. W okręgu wyborczym badanie preferencji politycznych wybranych wyborców ujawniło, że 70% popiera kandydata A, zaś 30% kandydata B. Jednakże badanie to, jednocześnie wykazało, że wśród tych, którzy popierają kandydata A, 32% pójdzie głosować, a wśród tych popierających kandydata B, 90%. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wybrana osoba oddająca głos, odda go na kandydata A?

odp.:

$$P\left(A\right)= \frac{0.7∙0.32}{0.7∙0.32+0.3∙0.9}=0.45$$

1. Wiedząc, że ułamek $p\_{k}=0,49$ populacji to kobiety, wśród których ułamek $f=0.005$ stanowią daltonistki oraz wiedząc, że ułamek $p\_{d}=0.05$ całej populacji cierpi na daltonizm, oblicz jakie jest prawdopodobieństwo, że spośród losowego daltonisty, wylosujemy kobietę.

odp.:

$$P\left(A\right)= \frac{0.49 ∙0.005}{0.05}=0.05$$

1. Wśród wszystkich ciąż, jedna na 300 prowadzi do bliźniąt monozygotycznych (jednojajowe), kiedy to dzieci są tej samej płci i są podobne do siebie, jak dwie krople wody, natomiast z jednej ciąży na 125 rodzą się bliźnięta dizygotyczne (dwujajowe), które mogą być różnej płci i niczym się nie różnią od dzieci urodzonych w dwóch kolejnych ciążach. Elvis Presley miał brata bliźniaka, który zmarł podczas porodu. Wyznacz prawdopodobieństwo, że Presley był bliźniakiem monozygotycznym

odp.:

$$P\left(B\_{1}\right)=\frac{1}{300}$$

$$P\left(B\_{2}\right)=\frac{1}{125}$$

$$P\left(B\_{1}\right)= 1$$

$$P\left(B\_{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$P\left(A\right)= \frac{\frac{1}{300}}{\frac{1}{300}+\frac{1}{125}∙\frac{1}{2}}=0,45$$

1. (Paradoks Monty Hall’a) Gracz popularnego teleturnieju stoi przed wyborem jednej z trzech bramek. Za jedną z bramek stoi nagroda – samochód, a za pozostałymi dwoma nie ma nic. Gracz wybiera jedną z bramek. Następnie prowadzący (Zygmunt Hajzer ☺) odsłania jedną z pustych bramek (inną niż ta wybrana przez gracza) i daje graczowi możliwość zmiany swojego wyboru. Czy gracz powinien zmienić swój wybór czy nie?
2. (Problem trzech więźniów) W celi zamkniętych jest 3 więźniów: A, B, C. Jeden z nich ma być stracony – decyzja już zapadła, ale żaden z więźniów nie wie, kto ma zostać stracony. W pewnym momencie przychodzi strażnik i wypuszcza więźnia B. Czy prawdopodobieństwo, że stracą więźnia A jest teraz większe, mniejsze, czy takie samo jak na początku?
3. (Paradoks Bertrand’a) Na okręgu o promieniu 1skonstruowano losowo cięciwę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że cięciwa będzie dłuższa, niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

odp.:

Podejście nr 1: Wybór kąta $α$ utworzonego na środku okręgu – 1/3

Podejście nr 2: Odległość środka cięciwy od środka okręgu – 1/2

Podejście nr 3: Wybór dowolnego punktu wewnątrz okręgu wpisanego w trójkąt wpisany – 1/4

1. (Paradoks pudełka Bertrand’a) W trzech pudełkach znajdują się po dwie monety. W pierwszym pudełku dwie złote, w drugim dwie srebrne, a w trzecim jedna złota, druga srebrna. Wybieramy losowo pudełko i wyciągamy z niego jedną monetę, która okazuje się złota. Jakie jest prawdopodobieństwo, że druga moneta też jest złota?