Wykład IX

Zadanie 1.

Zmienne losowe X_1, X_2,…., X_{192} są niezależne o jednakowym rozkładzie jednostajnym U[1,3]. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo $P(364 < S_{192} < 400)$.

1. rozkł. jednostajny $U[1;3]$

$X_1, X_2, \ldots X_{192}$ – zmienne niezależne

$P(364 < S_{192} < 400) = ?$

$n = 192$

Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego i uwagi z niego wynikającej (gdyż $n = 192 > 25$ → można stosować przybliżenie rozkładem normalnym).

$S_{192} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{192}$

$S_{192} = \overline{X} \cdot 192$

Rozkład S_n jest bliski $N(n\mu, \sqrt{n}\,\sigma)$. Niech X_i oznacza wartość i-tej zmiennej z ciągu $X_1, X_2, \ldots X_{192}$

$$\left.\begin{aligned} \mu &= E(X_i) = \frac{1+3}{2} = 2 \\ \sigma^2 &= Var(X_i) = \frac{(3-1)^2}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \text{na podstawie parametrów rozkładu jednostajnego}$$

Korzystając z uwagi do centralnego twierdzenia granicznego:

$$P\left(a < \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \le b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a) \quad \text{przy } n \to \infty$$

rozkład jest ciągły, więc $P(X=x) = 0$

stąd $P(364 < S_{192} < 400) = P(364 \le S_{192} \le 400) = \left\{ \begin{array}{l} \text{dokonuję} \\ \text{standaryzacji} \end{array} \right\} =$

$$= P\left(\frac{364 - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < \frac{S_{192} - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < \frac{400 - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{po podstawieniu } n = 192 \\ \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \mu = 2 \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(\frac{364 - 192 \cdot 2}{\sqrt{192} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}} < \frac{S_{192} - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} < \frac{400 - 192 \cdot 2}{\sqrt{192} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}}\right) = P\left(\frac{-20}{\sqrt{64}} < Z < \frac{16}{\sqrt{64}}\right) =$$

$$= P(-2{,}5 < Z < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2{,}5) = \Phi(2) - [1 - \Phi(2{,}5)] =$$

gdzie Z ma standardowy rozkład normalny

zgodnie z własnościami dystrybuanty

$$= \Phi(2) + \Phi(2{,}5) - 1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{po odczytaniu} \\ \text{z tablic} \end{array} \right\} = 0{,}97725 + 0{,}993790 - 1 =$$

$= 0{,}97104.$

Odp. Przybliżone prawdopodobieństwo $P(364 < S_{192} < 400)$ to ok. $0{,}97104$.

Zadanie 2.

Zmienne losowe X_1, X_2,…., X_{100} są niezależne o jednakowym rozkładzie Poissona o parametrze 4. Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo $P(S_{100} < 440)$.

2. $X_1, X_2, \ldots X_{100}$ – zmienne niezależne, rozkład Poissona

$\lambda = 4$

$P(S_{100} < 440) = ?$

X_i – wartość i-tej zmiennej losowej z ciągu $X_1, X_2, \ldots X_{100}$

$n = 100 \geq 25$, w związku z czym można zastosować centralne twierdzenie graniczne

$\left.\begin{array}{l} \mu = E(X_i) = \lambda = 4 \\ \sigma^2 = Var(X_i) = \lambda = 4 \end{array}\right\}$ z własności rozkładu Poissona

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 2$

Zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym rozkład S_{100} jest bliski rozkładowi $N(400, 20)$, tj $N(n\mu, \sqrt{n}\sigma)$.

Ponieważ jednak zmienne losowe X_i przyjmują jedynie wartości całkowite, a rozkład dyskretny (tu: Poissona) przybliżany rozkładem normalnym, tj. ciągłym, należy zastosować poprawkę w przybliżeniu normalnym:

$P(S_{100} < 440) \to P(S_{100} < 440{,}5)$

Po standaryzacji: $P(S_{100} < 440{,}5) = P\left(\frac{S_{100} - 400}{20} < \frac{440{,}5 - 400}{20}\right) \approx$

$\approx P(Z < 2{,}025) = \Phi(2{,}025) = 0{,}978566$ po odczytaniu z tablic.

gdzie Z ma standardowy rozkład normalny

Odp. Przybliżone prawdopodobieństwo $P(S_{100} < 440)$ wynosi $0{,}978566$.

Zadanie 3.

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_{135}$ są niezależne o jednakowym rozkładzie zadanym gęstością $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & dla \quad x \in [-1,1] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$

Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo $P(S_{135} > -11)$.

3. $X_1, X_2, \ldots X_{135}$ - niezależne zmienne

$n = 135$ $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{dla } x \in \langle -1;1 \rangle \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$

$P(S_{135} > -11) = ?$

X_i - wartość i-tej zmiennej losowej z ciągu

$\mu = E(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} x^3 dx = \frac{3}{8} x^4 \Big|_{-1}^{1} = 0$

$E(X_i^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} x^4 dx = \frac{3}{10} x^5 \Big|_{-1}^{1} = 0{,}6$

$\sigma^2 = Var(X_i) = E(X_i^2) - \mu^2 = 0{,}6$

$n \geqslant 25 \rightarrow$ można zastosować Centralne Twierdzenie Graniczne:

rozkład S_{135} jest bliski rozkładowi $N(135 \cdot 0, \sqrt{135} \cdot \sqrt{0{,}6})$, tj $N(0, 9)$

Zatem $P(S_{135} > -11) = P\left(\frac{S_{135} - 0}{9} > \frac{-11-0}{9}\right) \approx P\left(Z > -\frac{11}{9}\right) =$

$= 1 - P\left(Z < -\frac{11}{9}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{11}{9}\right) = 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{11}{9}\right)\right] = 1 - 1 + \Phi\left(\frac{11}{9}\right) = \Phi\left(\frac{11}{9}\right) \approx$

$\approx \Phi(1{,}22) = 0{,}8888$ - z tablic.

Odp. $P(S_{135} > -11)$ wynosi w przybliżeniu $0{,}8888$.

Zadanie 4.

Zmienne losowe X_1, X_2,…., X_{176} są niezależne o jednakowym rozkładzie danym tabelką:

x	0	1	2
p(x)	0,5	0,4	0,1

Oblicz przybliżone prawdopodobieństwo $P(S_{176} < 100)$.

4. $X_1, X_2, \ldots X_{176}$ – niezależne zmienne losowe

x	0	1	2
p(x)	0,5	0,4	0,1

x_i - wartość przyjęta przez i-tą zmienną z ciągu

$P(S_{176}<100)=?$

$n=176 \geq 25$ - można stosować CTG

$\mu = E(X_i) = \sum_j x_j p(x_j) = 0\cdot 0,5 + 1\cdot 0,4 + 2\cdot 0,1 = 0,6$ - z def. wartości oczekiwanej

– z def. wariancji dla zmiennej losowej dyskretnej

$\sigma^2 = Var(X_i) = \sum_j (x_j-\mu)^2 p(x_j) = 0,36\cdot 0,5 + 0,16\cdot 0,4 + 1,96\cdot 0,1 = 0,44$

z CTG wynika, że S_{176} ma rozkład zbliżony do $N(176\cdot 0,6; \sqrt{176}\cdot\sqrt{0,44})$.

tj. $N(105,6; 8,8)$.

rozkład X_i jest dyskretny, a zmienne mogą przyjmować jedynie wartości całkowite – należy zastosować poprawkę w przybliżeniu normalnym:

$P(S_{176}<100) \to P(S_{176}<100,5)$

Standaryzacja:

$$P\left(\frac{S_{176}-105,6}{8,8} < \frac{100,5-105,6}{8,8}\right) \approx P\left(Z<-\frac{5,1}{8,8}\right) \approx$$

$$\approx P(Z<-0,58) = \Phi(-0,58) = 1-\Phi(0,58) = 1-0,7190 = 0,281$$

$\boxed{\text{Odp. } P(S_{176}<100) \text{ wynosi w przybliżeniu } 0,281.}$

wykonał
Sławomir Jabłoński,
s14736