Zadanie 1.

a)

Wartość C obliczamy z warunku sumowania się prawdopodobieństw do jedności:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

$$1 + 3C = 1$$

$$C = 0$$

Kompletna postać tabelki jest zatem następująca:

Y / X	0	1	2
-1	**0.1**	**0.1**	0.3
1	**0**	**0.2**	0
3	0.1	0	0.2

Prawdopodobieństwo warunkowe obliczamy ze wzoru:

$$P(X < 3 \mid Y < 2) = \frac{P(X < 3, Y < 2)}{P(Y < 2)}$$ (licznik pogrubiony w tabelce)

$$P(X < 3 \mid Y < 2) = \frac{0.4}{0.5}$$

b)

Aby zmienne były niezależne prawdopodobieństwa poszczególnych par wartości powinny być równe iloczynowi odpowiednich prawdopodobieństw brzegowych. Warunek ten **nie jest spełniony**, np.:

$$P(X = 3, Y = 1) = 0$$

Podczas gdy:

$$P(X = 3) = 0.1 + 0 + 0.2 = 0.3$$

$$P(Y = 1) = 0.1 + 0.2 + 0 = 0.3$$

Wobec tego:

$$P(X = 3) \cdot P(Y = 1) \neq P(X = 3, Y = 1)$$

Zmienne *X* i *Y* nie są niezależne, a zatem są zależne.

Zadanie 2.

Wartość C wyliczamy z warunku $\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy = 1$

W naszym przypadku funkcja gęstości niezerowe wartości osiąga tylko w pewnym obszarze D, który jest kwadratem: $D: \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$, wobec tego:

U nas:

$$\iint\limits_{R^2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} Cx^2 ydxdy = C \cdot \int_{-1}^{1} x^2 dx \cdot \int_{0}^{2} ydy = C \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}C = 1$$

Stąd $C = \dfrac{3}{4}$

Dystrybuantę dwuwymiarowej zmiennej losowej wyliczam ze wzoru:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dv \right] du$$

A zatem: $F(2,1) = \int_{-\infty}^{2} \left[\int_{-\infty}^{1} f(x,y)dy \right] dx =$

{ograniczamy się do przedziału gdzie gestosc jest niezerowa}

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1} 0.75 \cdot x^2 y\, dy = 0.75 \cdot \int_{-1}^{1} x^2 dx \cdot \int_{0}^{1} ydy = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Zadanie 3.

Wartość C wyliczamy tak samo, jak w poprzednim zadaniu. Tym razem jednak obszar, w którym funkcja gęstości jest niezerowa może być zapisany następująco (nie jest to już prostokąt, tylko trójkąt):

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2x \end{cases}$$

Wobec tego:

$$\iint_{R^2} f(x,y)dxdy = \iint_D Cx^2dxdy = C\cdot\int_0^1 dx\int_0^{2x} x^2dy = C\cdot\int_0^1 2x^3dx = \frac{C}{2}$$

A zatem musi być spełniony warunek:

$$\frac{C}{2} = 1 \quad => \quad C = 2$$

Dla dwuwymiarowych zmiennych losowych typu ciągłego warunkiem koniecznym i wystarczającym ich niezależności jest spełnienie dla $x, y \in \mathrm{R}$ równości:

$$fx, y = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

Wyznaczamy gęstości rozkładów brzegowych:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^{2x} 2x^2dy + \int_{2x}^{+\infty} 0 = \int_0^{2x} 2x^2dy = 4x^3$$

Skąd:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{gdy} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{przeciwnie} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int_{-\infty}^{y/2} 0 + \int_{y/2}^{1} 2x^2dx + \int_1^{+\infty} 0 = \int_{y/2}^{1} 2x^2dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_{x=y/2}^{x=1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{y^3}{8}$$

Zatem:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{y^3}{12} & \text{gdy} \quad 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{przeciwnie} \end{cases}$$

Zatem:

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = 4x^3\cdot\left(\frac{2}{3} - \frac{y^3}{12}\right) \ne f(x,y)$$

Zmienne X i Y nie są niezależne.

Gęstość warunkową wyznaczamy jako:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

Wobec tego

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{\frac{2}{3} - \frac{y^3}{12}} = \dfrac{24x^2}{8 - y^3} & \text{dla} \quad \dfrac{y}{2} \le x \le 1 \\ 0 & \text{dla} \quad \text{pozostalych x} \end{cases},$$

przy ustalonym *y* z przedziału [0,2].