Wykład V

Zadanie 1. (za 2 pkt)

Dyskretna zmienna losowa X ma funkcję prawdopodobieństwa określoną tabelą:

x	-2	-1	0	1	2
p(x)	a	0.2	b	0.4	c

a) Oblicz a, b, c wiedząc, że $EX^3 = 1$ i $F(0) = 0,4$.
b) Oblicz wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe zmiennej losowej X.
c) Oblicz $P(X>-2|X<2)$.
d) Oblicz medianę.

1. a) $EX^3 = 1 \rightarrow$ trzeci moment zwykły zmiennej losowej X

na podst. def. momentu zwykłego

$m_k = \mu_{x^k} = EX^k$

z def. wartości oczekiwanej

$EX = \sum_{i=1}^{k} x_i \, p(x_i)$

$E(X^3) = \sum_{i=1}^{k} x_i^3 \, p(x_i)$

$EX^3 = -8a + (-0,2) + 0b + 0,4 + 8c$

$EX^3 = -8a - 0,2 + 0,4 + 8c$

$EX^3 = -8a + 0,2 + 8c$

$1 = -8a + 0,2 + 8c \quad / -0,2$

$-8a + 8c = 0,8 \quad // 8$

$-a + c = 0,1 \quad / +a$

$c = a + 0,1$

$F(0) = 0,4$ - z danych

$F(x) = P(X \leq x)$ - z def. dystrybuanty

$F(0) = P(-2) + P(-1) + P(0)$

$F(0) = a + 0,2 + b$

$0,4 = a + 0,2 + b \quad / -0,2$

$a + b = 0,2 \quad / -a$

$b = 0,2 - a$

$P(\Omega)=1$ - na podst. 2-go aksjomatu prawdopodobieństwa

$\Omega=\{-2;-1;0;1;2\}$

$P(\Omega)=P(-2)+P(-1)+P(0)+P(1)+P(2)$

$P(\Omega)=a+0{,}2+b+0{,}4+c$

$1=a+b+c+0{,}6 \quad /-0{,}6$

$a+b+c=0{,}4$

$a+(0{,}2-a)+(a+0{,}1)=0{,}4$

$a+0{,}3=0{,}4 \quad /-0{,}3$

$a=0{,}1$

$b=0{,}2-a=0{,}2-0{,}1=0{,}1$

$c=0{,}1+a=0{,}1+0{,}1=0{,}2$

Odp. $\begin{cases} a=0{,}1 \\ b=0{,}1 \\ c=0{,}2 \end{cases}$

b) $EX=\sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i)$ - z def. wartości oczekiwanej

$EX=-2a-0{,}2+0{,}4+2c$

$EX=-2a+2c+0{,}2$

$EX=-2\cdot 0{,}1+2\cdot 0{,}2+0{,}2$

$EX=-\cancel{0{,}2}+0{,}4+\cancel{0{,}2}$

$EX=0{,}4$

z def. odchylenia standardowego:

$\sigma_x=\sqrt{\sigma_x^2}$

z def. wariancji:

$\sigma_x^2=\sum_{i=1}^{k}(x_i-\mu_x)^2 p(x_i) \qquad \mu_x=EX$

$\sigma_x^2=(-2-0{,}4)^2\cdot a+(-1-0{,}4)^2\cdot 0{,}2+(0-0{,}4)^2\cdot b+(1-0{,}4)^2\cdot 0{,}4+(2-0{,}4)^2\cdot c$

$\sigma_x^2=5{,}76a+1{,}96\cdot 0{,}2+0{,}16b+0{,}36\cdot 0{,}4+2{,}56c$

$\sigma_x^2=5{,}76\cdot 0{,}1+0{,}392+0{,}16\cdot 0{,}1+0{,}144+2{,}56\cdot 0{,}2$

$\sigma_x^2 = 0,576 + 0,392 + 0,016 + 0,144 + 0,512$

$\sigma_x^2 = 1,64$

$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{1,64} \approx 1,28.$

Odp. $\begin{cases} EX = 0,4 \\ \sigma_x \approx 1,28 \end{cases}$

c) $P(X>-2 \mid X<2)$

z def. prawdop. warunkowego:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(X>-2 \mid X<2) = \frac{P((X>-2) \cap (X<2))}{P(X<2)} = \frac{P(-2<X<2)}{P(X<2)} =$$

$\begin{Bmatrix} \text{z def. dystrybuanty:} \\ F(x) = P(X \leq x) \end{Bmatrix} \rightarrow P(X<x) = P(X \leq x) - P(x)$

$P(X<2) = P(X \leq 2) - P(2)$

$P(X<2) = F(2) - c$

$\begin{cases} F(2) = p(-2) + P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) \\ F(2) = F(5) = 1 \end{cases}$

$P(X<2) = 1 - c = 1 - 0,2 = 0,8$

$P(-2<X<2) = \begin{Bmatrix} \text{na podst. stwierdzenia} \\ P(a<X<b) = F(b) - F(a) - P(X=b) \end{Bmatrix} =$

$= F(2) - F(-2) - P(2) = 1 - a - c = 1 - 0,1 - 0,2 = 0,7$

$$\frac{P(-2<X<2)}{P(X<2)} = \frac{0,7}{0,8} = \frac{7}{8} = 0,875$$

Odp. $P(X>-2 \mid X<2) = 0,875$

d.) z def. mediany

$q_{0,5}$ spełnia warunki:

① $F(x) \le 0{,}5$ dla $x < q_{0,5}$

② $F(x) \ge 0{,}5$ dla $x \ge q_{0,5}$

z def. dystrybuanty:

$F(x) = P(X \le x)$

$F(-2) = a = 0{,}1$ - nie spełnia warunku ②

$F(-1) = P(X \le -1) = P(X=2) + P(X=-1) = F(-2) + P(-1) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$ - nie spełnia ②

$F(0) = F(-1) + P(0) = 0{,}3 + b = 0{,}4$ - nie spełnia ②

$F(1) = F(0) + P(1) = 0{,}8$ - spełnia oba warunki

$F(2) = P(S) = 1$ - nie spełnia warunku ①

Odp. Mediana to 1.

Zadanie 2.

Zmienna losowa X ma rozkład Poissona taki, że $EX^2=6$. Oblicz $P(X>1)$.

2. X - rozkład Poissona

$EX^2=6$

z def. momentu zwykłego

$m_k = E(X^k) = \mu_{x^k} = \sum_{i=1}^{k} x_i^k p(x_i)$ $EX^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 p(x_i)$

$P(X>1) = 1 - P(X\leq 1) = 1 - F(1)$

z def. rozkładu Poissona:

$EX^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot$ $p(x_i,\lambda)$ $p(x_i,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!}$

$EX^2 = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \sum_{i=1}^{k} x_i \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{(x_i-1)!}$

$EX^2 = \mu_2 + (EX)^2$ - zależności między momentem zwykłym a centralnym

$EX^2 = \sigma_x^2 + \lambda^2$

dla rozkładu Poissona EX i $\sigma_x^2 = \lambda$ - na podst. twierdzenia

$EX^2 = \lambda + \lambda^2$

$\lambda^2 + \lambda = 6$

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$\lambda = -3 \vee \lambda = 2$

z def. $\lambda > 0$, więc $\lambda = 2$

na podst. def. rozkładu Poissona

$P(X=k) = p(k;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ $k = 0,1,2\ldots$

skoro więc $k = 0,1,2\ldots$

to $P(X>1) = 1 - P(X\leq 1)$

skoro $k=0,1,2\ldots$ to

$P(X\leq 1) = P(X=0) + P(X=1) =$

$= P(0) + P(1)$

$P(0) = \frac{e^{-2}2^0}{1} = e^{-2}$

$P(1) = \frac{e^{-2}\cdot 2}{1} = 2e^{-2}$

$P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(0) + P(1)) = 1 - e^{-2} - 2e^{-2}$

$P(X>1) = 1 - 3e^{-2} = 1 - \frac{3}{e^2} \approx 0{,}59.$

Odp. $P(X>1) \approx 0{,}59.$

Zadanie 3.

Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy o parametrach *n* i *1/3*.
Prawdopodobieństwo uzyskania co najmniej jednego sukcesu wynosi *65/81*. Oblicz *n*.

3. $X \sim Bin(n, \frac{1}{3})$ $\quad n = ?$

$P(X \geq 1) = \frac{65}{81}$

$P(X \geq 1) = P(S) - P(X < 1) = P(S) - (P(X \leq 1) - P(1)) =$

$= 1 - P(X \leq 1) + P(1)$

z def. rozkładu dwumianowego:

$P(X=k) = b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2 \dots n$

Skoro $k = 0, 1, 2, \dots, n$ to $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$1 - P(X \leq 1) + P(1) = 1 - (P(0) + P(1)) + P(1) =$

$= 1 - P(0) - \cancel{P(1)} + \cancel{P(1)} = 1 - P(0)$

$P(X \geq 1) = 1 - P(0)$

$\frac{65}{81} = 1 - P(0) \quad / + P(0) - \frac{65}{81}$

$P(0) = \frac{16}{81}$

z def. rozkładu dwumianowego

$P(X=k) = b(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, 2, \dots n$

$p = \frac{1}{3}$ – z danych

podstawiam za $k = 0$

$P(0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n-0}$

$P(0) = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$P(0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\frac{16}{81} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$n = 4$

Odp. $n = 4$

wykonał Sławomir Jabłoński, s14736