Wykład III

Zadanie 1. Niech $P(A \mid B \cap C) = 0.5$, $P(B \mid A \cap C) = 0.3$, $P(C \mid A \cap B) = 0.9$. Oblicz $P(A \cap B \cap C \mid (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))$.

1. a) $P(A|B \cap C) = 0{,}5$

b) $P(B|A \cap C) = 0{,}3$

c) $P(C|A \cap B) = 0{,}9$

$P(A \cap B \cap C | (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = ?$

{ na podstawie definicji prawdopodobieństwa warunkowego $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ }

$$P(A \cap B \cap C | (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \frac{P(A \cap B \cap C \cap ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)))}{P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))} =$$

$$= \{\text{z prawa pochłaniania}\} = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))} \quad (1)$$

z a) na podst. def. prawdop. warunkowego:

$$\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = 0{,}5 \rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0{,}5\,P(B \cap C)$$

z b):

$$\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap C)} = 0{,}3 \rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0{,}3\,P(A \cap C)$$

z c):

$$\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = 0{,}9 \rightarrow P(A \cap B \cap C) = 0{,}9\,P(A \cap B)$$

$$P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \{\text{z twierdzenia } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} =$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) - P(A \cap B \cap C) - \cancel{P(A \cap B \cap C)} + \cancel{P(A \cap B \cap C)} =$$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C) - 2 \cdot P(A \cap B \cap C) \quad (2)$$

$$P(A\cap B\cap C) = 0{,}5P(B\cap C) \rightarrow P(B\cap C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{0{,}5} = 2P(A\cap B\cap C) \quad (3)$$

$$P(A\cap B\cap C) = 0{,}3P(A\cap C) \rightarrow P(A\cap C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{0{,}3} = \frac{10}{3}P(A\cap B\cap C) \quad (4)$$

$$P(A\cap B\cap C) = 0{,}9P(A\cap B) \rightarrow P(A\cap B) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{0{,}9} = \frac{10}{9}P(A\cap B\cap C) \quad (5)$$

Podstawiając (2), (3), (4) i (5) do wzoru (1) otrzymujemy:

$$\frac{P(A\cap B\cap C)}{\cancel{2P(A\cap B\cap C)} + \frac{10}{3}P(A\cap B\cap C) + \frac{10}{9}P(A\cap B\cap C) - \cancel{2P(A\cap B\cap C)}} =$$

$$= \frac{\cancel{P(A\cap B\cap C)}}{\left(\frac{10}{9}+\frac{10}{3}\right)\cancel{P(A\cap B\cap C)}} = \frac{1}{\frac{10}{9}+\frac{10}{3}} = \frac{1}{1\frac{1}{9}+3\frac{3}{9}} = \frac{1}{4\frac{4}{9}} = \frac{1}{\frac{40}{9}} = \frac{9}{40}$$

Odp. $P(A\cap B\cap C \mid (A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) = \frac{9}{40}$.

Zadanie 2. 8 osób trzeba posadzić na ośmiu miejscach w rzędzie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

a) osoby X ,Y, Z siedzą obok siebie
b) każda z 4 par małżeńskich siedzi razem obok siebie

2.
8 osób
8 miejsc

można usadzić na 8! sposobów

a) A - zdarzenie losowe polegające na tym że osoby X, Y, Z siedzą obok siebie

$C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$n = 8$
$k = 3$

$\overline{A} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot \cancel{5!}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{6}} = 56$

$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{\Omega}} = \boxed{\frac{1}{56}}$

b) B - każda z 4 par małżeńskich siedzi razem obok siebie

$\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{8!} = \frac{28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1}{40320} = \underline{0{,}0625}$

Zadanie 3. Niech A_1, A_2, A_3 będą łącznie niezależnymi zdarzeniami takimi, że $0 < P(A_j) < 1$ dla $j = 1, 2, 3$.

Zbadać niezależność zdarzeń $C = A_1 - A_2$ i $D = A_2 - (A_1 \cup A_3)$.

3. A_1, A_2, A_3 - zdarzenia łącznie niezależne $\Rightarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

$C = A_1 - A_2$

$D = A_2 - (A_1 \cup A_3)$

jeśli C i D niezależne, to $P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D)$

$P(C \cap D) = P((A_1 - A_2) \cap (A_2 - (A_1 \cup A_3))) =$

$= P(A_1 \cap A_2' \cap (A_2 \cap (A_1 \cup A_3)')) = P(A_1 \cap A_2' \cap A_2 \cap (A_1 \cup A_3)') =$

$= 0$, gdyż $A_2 \cap A_2' = \emptyset$

$P(C) = P(A_1 - A_2) = P(A_1 \cap A_2') = P(A_1) \cdot \overset{= (1 - P(A_2))}{P(A_2')}$ – na mocy wykładu III zdarzenia niezal.

$P(D) = P(A_2 - (A_1 \cup A_3)) = P(A_2 \cap (A_1 \cup A_3)') = P(A_2 \cap A_1' \cap A_3') = P(A_2) \cdot \overset{(1 - P(A_1))}{P(A_1')} \cdot \underset{(1 - P(A_3))}{P(A_3')}$

$P(C) \cdot P(D) = P(A_1) \cdot P(A_2') \cdot P(A_2) \cdot P(A_1') \cdot P(A_3') \neq 0$ – z warunków zadania $P(A_j) \in (0;1)$ dla $j = 1, 2, 3$

Odp. Zdarzenia C i D nie są niezależne.

Zadanie 4. Niech $A_1, A_2, A_3 A_4, A_5$ będą łącznie niezależnymi zdarzeniami takimi, że $P(A_j) = (0.5)^j$ dla j=1,...,5. Obliczyć $P((A_1 \cup A_2) - (A_3 \cup A_4 \cup A_5))$.

4. A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – łącznie niezależne tj. $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) =$

$= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5)$ – z definicji

$P(A_j) = (0{,}5)^j$ dla $j = 1, \ldots, 5$

$P((A_1 \cup A_2) - (A_3 \cup A_4 \cup A_5)) =$

$= P((A_1 \cup A_2) \cap (A_3 \cup A_4 \cup A_5)') = P((A_1 \cup A_2) \cap (A_3' \cup A_4' \cup A_5')) =$

$= P((A_3' \cup A_4' \cup A_5' \cup A_1) \cap (A_3' \cup A_4' \cup A_5' \cup A_2)) = \left\{\begin{array}{l}\text{na podst. twierdzenia}\\ \text{dot. zdarzeń niezależnych}\\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\end{array}\right\} =$

$= P(A_1 \cup A_3' \cup A_4' \cup A_5') \cdot P(A_2 \cup A_3' \cup A_4' \cup A_5') =$

$= \left\{\begin{array}{l}\text{nie wiadomo, czy zdarzenia}\\ \text{są wykluczające się, korzystam}\\ \text{z twierdzenia:}\\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\end{array}\right\} =$

$= \left\{\begin{array}{ll}\text{z warunków zadania:} & \\ 0{,}5 = P(A_1) & z\ def.\ P(A') = 1 - P(A) \\ 0{,}25 = P(A_2) & P(A_1') = 0{,}5 \\ 0{,}125 = P(A_3) \rightarrow & P(A_2') = 0{,}75 \\ 0{,}0625 = P(A_4) & P(A_3') = 0{,}873 \\ 0{,}03125 = P(A_5) & P(A_4') = 0{,}9375 \\ & P(A_5') = 0{,}96875\end{array}\right\} =$

$= \big(P(A_1) + P(A_3') + P(A_4') + P(A_5') - P(A_1)P(A_3') - P(A_1)P(A_4') - P(A_1)P(A_5') -$

$- P(A_3')P(A_4') - P(A_3')P(A_5') - P(A_4')P(A_5') + P(A_1)P(A_3')P(A_4') + P(A_1)P(A_3')P(A_5') +$

$+ P(A_1)P(A_4')P(A_5') + P(A_3')P(A_4')P(A_5') - P(A_1)P(A_3')P(A_4')P(A_5')\big) \cdot$

$\cdot \big(P(A_2) + P(A_3') + P(A_4') + P(A_5') - P(A_2)P(A_3') - P(A_2)P(A_4') - P(A_2)P(A_5') -$

$- P(A_3')P(A_4') - P(A_3')P(A_5') - P(A_4')P(A_5') + P(A_2)P(A_3')P(A_4') + P(A_2)P(A_3')P(A_5') +$

$+ P(A_2)P(A_4')P(A_5') + P(A_3')P(A_4')P(A_5') - P(A_2)P(A_3')P(A_4')P(A_5')\big) = \left\{\begin{array}{l}\text{po podstawieniu}\\ \text{gotowych}\\ \text{wartości}\end{array}\right\} =$

$= 0{,}99987793 \cdot 0{,}99816895 = \underline{0{,}99694847}$

wykonał
Sławomir Jabłoński,
S14736