Zadanie 1. Zanotowano czasy wykonania pewnego programu (w sek.)
6 d 6 3 7 6 6 4 10 3 18,
gdzie d jest zagubioną obserwacją. Przedtem jednak obliczono średni próbkowy czas 7 (sek.)
a) Wyznacz d, modę, medianę oraz dolny i górny kwantyl.
b) Narysuj i opisz wykres ramkowy.

1. Dane:

$\overline{x} = 7$

x_i: 6; d; 6; 3; 7; 6; 6; 4; 10; 3; 18

a) wyznacz d

z definicji $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

n = wielkość próbki = 11

$7 = \frac{1}{11} \cdot (6+d+6+3+7+6+6+4+10+3+18) \quad / \cdot 11$

$77 = d + 69 \quad / -69$

$\boxed{d = 8}$

wyznacz modę:

zgodnie z definicją moda to wartość najczęściej występująca w próbce.

Ilości wystąpień poszczególnych wartości w próbce:

wartości	liczności
3	2
4	1
6	4
7	1
8	1
10	1
18	1

Wobec powyższego, moda w tym przypadku jest wartość 6.

wyznacz medianę:
z definicji:

$$x_{med} = \begin{cases} x_{((n+1):2)} & \text{gdy } n \text{ nieparzyste} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}\right) & \text{gdy } n \text{ parzyste} \end{cases}$$

$n=11$, więc $x_{med} = x_6$, przy czym zgodnie z definicją $x_1, x_2 \dots x_{(n-1)}, x_n$ są w kolejności niemalejącej.

$x_1 = 3$
$x_2 = 3$
$x_3 = 4$
$x_4 = 6$ ← próbka posortowana niemalejąco wg wartości
$x_5 = 6$
~~$x_6 = 6$~~ $\boxed{x_6 = x_{med} = 6}$
$x_7 = 6$
$x_8 = 7$
$x_9 = 8$
$x_{10} = 10$
$x_{11} = 18$

wyznacz górny i dolny kwartyl

górny kwartyl = $Q_3 = q_{\frac{3}{4}}$

dolny kwartyl = $Q_1 = q_{\frac{1}{4}}$

$Q_2 = x_{med} = q_{0,5} = 6$

dzielę populację na 2 podzbiory wg mediany:

$Q_1 = q_{0,25} = q_3 = 4$ - mediana pierwszego podzbioru

$Q_3 = q_{0,75} = q_9 = 8$ - mediana drugiego podzbioru

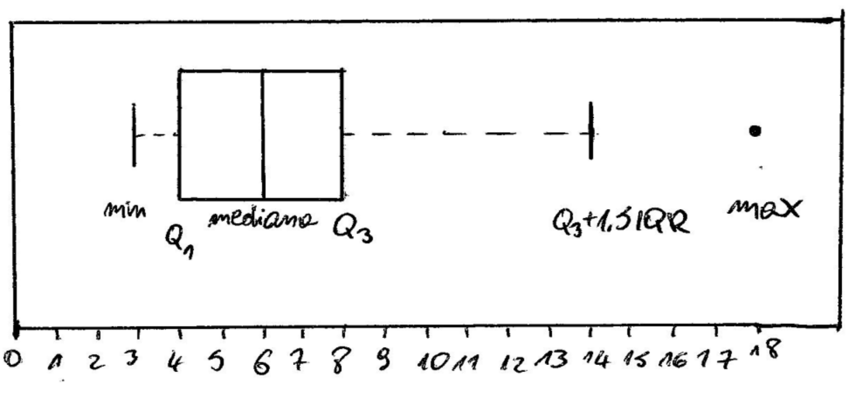
b) $x_1 = x_{min} = 3$ $\quad$ $IQR = Q_3 - Q_1 = 4$

$Q_1 = 4$ $\quad$ $1,5 \cdot IQR = 6$

$Q_2 = x_{med} = 6$ $\quad$ $Q_3 + 1,5 \cdot IQR = 14$

$Q_3 = 8$

$x_n = x_{max} = 18$



Zadanie 2. Zanotowano 11 czasów oczekiwania na połączenie z siecią (w sek.): 5.5, 2.5, 3.0, 4.0, 4.5, 5.5, 12.0, 3.5, 13.5, 1.7, 10.3. Oblicz średni czas, wariancję tego czasu.

2. Dane:

$n = 11$

próbka: 5,5 ; 2,5 ; 3,0 ; 4,0 ; 4,5 ; 5,5 ; 12,0 ; 3,5 ; 13,5 ; 1,7 ; 10,3

Szukane:

$\overline{x}$ - wartość średnia

S^2 - wariancja

z definicji wartości średniej:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{11}(5,5+2,5+3+4+4,5+5,5+12+3,5+1,7+10,3) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{11}} \cdot \cancel{66}^{6} = 6 \qquad \boxed{\overline{x} = 6}$$

z definicji wariancji:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot (0,25+12,25+9+4+2,25+0,25+36+6,25+18,49+18,49) =$$

$$= 0,1 \cdot 107,23 = 10,723$$

$$\boxed{S^2 = 10,723}$$

Zadanie 3. Cecha X ma gęstość $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, określoną wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & dla \quad x \in [-1,0] \\ Ctg\,2x & dla \quad x \in [0, \pi/8] \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Oblicz wartość stałej C i mediane.

3. Dane:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{dla } x \in \langle -1; 0) \\ C \cdot tg(2x) & \text{dla } x \in \langle 0; \frac{\pi}{8} \rangle \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$x \in (-\infty; \infty)$

Szukane:

C

x_{med}

z warunku spełnionego przez funkcję gęstości prawdopodobieństwa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-1}^{0} x^3 - 2x\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} C \cdot tg(2x)dx + \int_{-\infty}^{-1} 0 + \int_{\frac{\pi}{8}}^{+\infty} 0 =$$

$$= \frac{x^4}{4} + x^2 \Big|_{-1}^{0} + C \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} tg(2x)dx + 0 =$$

$$= \left(0 - \frac{1}{4} - 1\right) + C \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{8}} tg(2x)dx = -1,25 + C \cdot \frac{\ln 2}{4}$$

$-1,25 + C\frac{\ln 2}{4} = 1 \quad / \cdot 4$

$-5 + C\ln 2 = 4 \quad / + 5$

$C \cdot \ln 2 = 9 \quad / : \ln 2$

$C = \frac{9}{\ln 2} \approx 12,98$

Zadanie 4. Wiadomo, że kwantyle rzędu 0,1 i 0,2 rozkładu standardowego normalnego wynoszą: $z_{0,1} = -1,285$ i $z_{0,2} = -0,845$.

a. Znajdź kwantyle $q_{0,8}$ i $q_{0,9}$ rozkładu $N(55,6)$.
b. Wiadomo, że waga dorosłego mężczyzny w danym rejonie ma rozkład $N(55,6)$. Jaką wagę przekracza 90% dorosłych mężczyzn?

4. Dane:

$q_{0,1} = -1,285$, $q_{0,2} = -0,843$ } $N(0,1)$

a) $q_{0,8}$ dla $N(55,6)$ wyznaczono w punkcie b)

(1) $\int_{-\infty}^{q_{0,8}} \Phi_{55,6}(x)dx = \int_{-\infty}^{\frac{q_{0,8}-55}{6}} \varphi(z)dz = 0,8$ $\Phi(0,84) = 0,8$ stąd $\Phi(-0,84) = 1-0,8 = 0,2$

(2) $\int_{-\infty}^{0,84} \varphi(z)dz = 0,8$ Ponieważ $\varphi(z) > 0$ mamy z(1) i (2):

$\frac{q_{0,8}-55}{6} = 0,84$ czyli $q_{0,8} = 60,04$

b) $q_{0,9}$ dla $N(55,6)$

(1) $\int_{-\infty}^{q_{0,9}} \Phi_{55,6}(x)dx = \int_{-\infty}^{\frac{q_{0,9}-55}{6}} \varphi(z)dz = 0,9$

(2) $\int_{-\infty}^{1,28} \varphi(z)dz = 0,9$ $\Phi(1,28) = 0,9$ stąd $\Phi(-1,28) = 1-0,9 = 0,1$

ponieważ $\varphi(z) > 0$ mamy z (1) i (2):

$\frac{q_{0,9}-55}{6} = 1,28$ czyli $q_{0,9} = 62,68$ (kg)

90% mężczyzn ma co najmniej 62,68 kg.

$q_{0,8} = 60,04$
$q_{0,9} = 62,68.$

wykonał
Sławomir Jabłoński,
S14736