TEST I

Imię i nazwisko:

Numer indeksu:

Numer grupy:

Test jest testem wielokrotnego wyboru (tzn. wszystkie kombinacje odpowiedzi są możliwe). Pytanie jest uznane za poprawnie rozwiązane wttw, gdy wszystkie podpunkty w pytaniu mają zaznaczone właściwe odpowiedzi. Odpowiedzi "+" oraz "-" proszę zaznaczać przy każdym podpunkcie pytania w stosownym miejscu - wewnątrz nawiasu kwadratowego poprzedzającego treść [ ]. Życzę powodzenia.

1. Niech $A_t = \{x \in \mathbb{N} : t|x\}$, wtedy:
   - (a) [ ] jeżeli $T = \{2,3,5\}$, to $\bigcap_{t \in T} A_t = \{x \in \mathbb{N} : (2 \cdot 3 \cdot 5)\,|x\}$
   - (b) [ ] jeżeli $T = \{2,3,5\}$, to $\bigcup_{t \in T} A_t = \{x \in \mathbb{N} : (2 \cdot 3 \cdot 5)\,|x\}$
   - (c) [ ] jeżeli $T = \{2,3\}$, to $\bigcap_{t \in T} A_t \setminus \bigcup_{t \in T} A_t = \emptyset$
2. Niech $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$ oraz $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 1, 2\}$, stąd:
   - (a) [ ] $|A \cap B| = 1$
   - (b) [ ] $|B \cap C| = 1$
   - (c) [ ] $|(C \setminus B) \setminus A| = |(C \cup B) \cup A|$
3. Niech $A = \{1,2,3\}$ oraz $B = \{x : x \text{ jest liczbą pierwszą}\}$, wtedy:
   - (a) [ ] $A \times B = B \times A$
   - (b) [ ] $|A \times B| = |B \times A|$
   - (c) [ ] $(\{2,3\} \times \{2,3\}) \subset A \times B$
4. Niech A, B oraz C będą zbiorami niepustymi, wtedy:
   - (a) [ ] $A \oplus B \oplus C \subset A \cup B \cup C$
   - (b) [ ] $(A \cap B) \subset C' \cup (A \cap B)$
   - (c) [ ] $C' \setminus (A \cup B) = \emptyset$
5. Niech $U = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie uniwersum relacji r, wtedy:
   - (a) [ ] jeżeli $r = \emptyset$, to r jest relacją antysymetryczną, przechodnią
   - (b) [ ] jeżeli $r = \{(a,b) \in U : (a+b) \bmod 2 = 1\}$, to r jest relacją zwrotną lub symetryczną
   - (c) [ ] jeżeli $r = \{(a,b) \in U : a = 1 \wedge b > a\}$, to r jest relacją przeciwzwrotną lub spójną
6. Dla dowolnych relacji r_1 oraz r_2 zdefiniowanych nad niepustym uniwersum zachodzi:
   - (a) [ ] jeżeli r_1, r_2 są relacjami symetrycznymi, to relacja $r_1 \oplus r_2$ jest zwrotna
   - (b) [ ] jeżeli r_1, r_2 są relacjami zwrotnymi, to relacja $r_1 \setminus r_2$ jest przeciwzwrotna
   - (c) [ ] jeżeli obie relacje są relacjami pełnymi, to $|r_1 \oplus r_2| < |r_1 \cup r_2|$
7. Niech r i s będą relacjami takimi, że $r = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,3)\}$ oraz $s = \{(1,1), (2,3), (3,2), (3,3)\}$, wtedy:
   - (a) [ ] $r \circ s = \{(1,1), (1,3), (2,1), (3,2), (3,3)\}$
   - (b) [ ] $s \circ r = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

(c) [ ] $r \circ s \neq s \circ r$

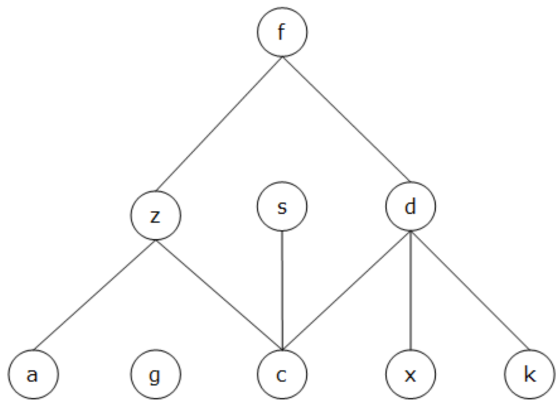
8. Niech r_1 oraz r_2 będą dowolnymi relacjami równoważności nad niepustym uniwersum, wtedy:

   (a) [ ] relacja $r_1 \oplus r_2$ nie jest relacją równoważności
   (b) [ ] relacja $r_1 \cup r_2$ nie jest relacją równoważności
   (c) [ ] jeżeli $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, to $r_1 \setminus r_2$ jest relacją równoważności

9. Istnieją skończony niepusty zbiór X oraz relacja równoważności r nad zbiorem X takie, że:

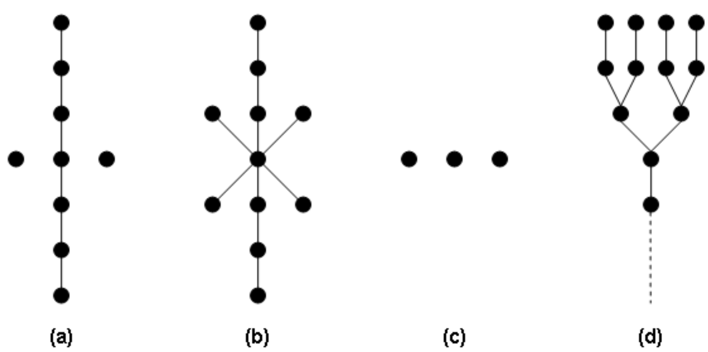
   (a) [ ] relacja r dzieli zbiór X na dwie klasy abstrakcji A oraz B takie, że $A \cap B \neq \emptyset$,
   (b) [ ] relacja r dzieli zbiór X na $\left\lfloor \sqrt{|X|} \right\rfloor$ klas abstrakcji
   (c) [ ] relacja r oraz r^{-1} generują identyczne podziały zbioru X

10. Rozważmy zbiór $X = \{a, c, d, f, g, k, s, x, z\}$ uporządkowany relacją r zgodnie z poniższym diagramem Hassego, wtedy:



   (a) [ ] ograniczeniem dolnym zbioru $\{z, s, d\}$ względem relacji r jest element c
   (b) [ ] ograniczeniem górnym zbioru $\{c, x, k\}$ względem relacji r jest element d albo f
   (c) [ ] $\sup\{s, d\} = f$ lub $\inf\{s, d\} = c$

11. Rozważ zbiory uporządkowane pewnymi relacjami zgodnie z diagramami Hassego przedstawionymi na poniższym rysunku. Które ze zdań jest prawdziwe:



   (a) [ ] w zbiorze (a) istnieje element największy
   (b) [ ] w zbiorze (b) nie istnieje element maksymalny
   (c) [ ] w zbiorze (c) lub (d) można wyróżnić element najmniejszy

12. Relacja $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ jest w zbiorze $\{a, b, c\}$ relacją porządku:

(a) [ ] częściowego
(b) [ ] liniowego
(c) [ ] dobrego

13. Porządkiem liniowym w zbiorze $W = \{w_1, w_2, w_3, \ldots\}$ wielokątów wypukłych na płaszczyźnie euklidesowej jest relacja r taka, że:

(a) [ ] $(w_i, w_j) \in r$ wttw wielokąt w_i zawiera się w wielokącie w_j
(b) [ ] $(w_i, w_j) \in r$ wttw pole powierzchni wielokąta w_i jest nie większe niż pole wielokąta w_j
(c) [ ] $(w_i, w_j) \in r$ wttw wielokąt w_i ma tyle samo wierzchołków co wielokąt w_j

14. Niech $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, będzie funkcją, wtedy:

(a) [ ] jeżeli $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$, to funkcja f nie jest suriekcją ale jest injekcją
(b) [ ] jeżeli $f(x) = \frac{1}{x}$, to funkcja f jest injekcją lub suriekcją
(c) [ ] jeżeli $f(x) = \frac{1}{x}$, to funkcja f nie jest bijekcją

15. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$, wtedy:

(a) [ ] dla $A = [-1, 1]$ zachodzi $f(A) = (0, \infty)$
(b) [ ] dla $B = (1, 2)$ zachodzi $f^{-1}(B) = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$
(c) [ ] dla $C = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ zachodzi $f(C) \cap f^{-1}(C) = \emptyset$

16. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją, jeżeli:

(a) [ ] $f(x) = ||x| - 2|$, to $f^{-1}(x) = \left|\frac{1}{2}|x| - 1\right|$
(b) [ ] $f(x) = x^5 + 5$, to $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 5}$
(c) [ ] $f(x) = f^{-1}(x)$, to $f(x) = x$

17. Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją postaci $f(n) = \sqrt{n}^3 \lg n! + n^2$. Które z podanych poniżej ograniczeń funkcji jest poprawne:

(a) [ ] $f(n) = \Theta\left(n^2\right)$
(b) [ ] $f(n) = \Omega\left(n^{\frac{5}{2}}\right)$
(c) [ ] $f(n) = O\left(n^{\sqrt{n}}\right)$

18. Niech $f(n) = n^3 + nlgn + \sqrt{n}$ oraz $g(n) = 2^{2lgn} + n^2$, wtedy:

(a) [ ] $f(n) + g(n) = \Omega(n)$
(b) [ ] $f(n) + g(n) = O\left(n^2\right)$
(c) [ ] $f(n) \cdot g(n) = \Theta\left(n^4\right)$

19. Które z poniższych stwierdzeń jest tautologią rachunku zdań:

(a) [ ] $(p \wedge \neg p) \vee (q \oplus \neg q)$
(b) [ ] $\neg(p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg p \vee q$
(c) [ ] $(p \to q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \to p)$

20. Które z poniższych zdań jest prawdziwe:

(a) [ ] $\exists (m \in \mathbb{Z}) \forall (n \in \mathbb{Z}) (m + n - 3 = 157)$
(b) [ ] $\forall (x \in \mathbb{Q}) \exists (y \in \mathbb{Q}) \left(\left(x^2 + 43\right) y = 3\right)$
(c) [ ] $\forall (p \in \mathbb{R}) \neg\exists (q \in \mathbb{R}) ((|p| + 43) y = 0)$