Elementy kombinatoryki

1. Uprościć wyrażenia: (a) $\frac{(n+1)!(2n)!}{2n!(2n-1)!}$, (b) $\frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$.
2. Na ile sposobów można ustawić na półce 10 różnych książek?
3. Rozważmy liczby pięciocyfrowe, w których zapisie każda z cyfr 1, 2, 3, 4, 5 występuje dokładnie raz.

   (a) Ile jest takich liczb mniejszych od pięćdziesięciu tysięcy?

   (b) Ile jest takich liczb większych od trzydziestu tysięcy?
4. Zawodnikom przydzielono kolejne numery od 1 do n. Ilu jest zawodników, jeśli numery startowe możemy przydzielić na 5040 sposobów?
5. Do windy zatrzymującej się na 7 piętrach wsiadło 6 osób. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiada: (a) na innym piętrze, (b) na innym piętrze, ale nikt nie wysiada na drugim piętrze?
6. Liczba permutacji zbioru (n+3)-elementowego jest 120 razy większa od liczby permutacji zbioru n-elementowego. Ile jest równe n?
7. Niech $\sum = \{a, b, c\}$. Ile jest w $\sum^*$ słów o długości 10, złożonych z 4 liter a, 3 liter b i 3 liter c?
8. Rozdanie brydżowe to podział uporządkowany talii 52 kart na cztery zbiory, po 13 kart w każdym. Ile jest rozdań brydżowych?
9. Niech S będzie zbiorem wszystkich ciągów o długości dziesięć, złożonych z cyfr 0, 1 i 2. Ile ciągów należących do S ma dokładnie 3 zera, 4 jedynki i 3 dwójki?
10. Na ile sposobów można podzielić dwanaścioro studentów na trzy zespoły robocze, po czworo studentów w każdym, z tym, że każdy zespół studiuje ten sam temat?
11. Ile jest liczb trzycyfrowych, w których zapisie nie występuje cyfra zero i cyfry się nie powtarzają?
12. Ile można utworzyć siedmiocyfrowych numerów telefonicznych rozpoczynających się od 701, w których żadna cyfra nie będzie się powtarzała?
13. Do windy zatrzymującej się na 10 piętrach wsiadły 4 osoby. Na ile sposobów osoby te mogą opuścić windę, jeśli każda z nich wysiada (a) na innym piętrze , (b) na innym piętrze i nikt nie wysiada na trzech ostatnich piętrach?
14. Kuba zapomniał dwie ostatnie cyfry z dziewięciu cyfr numeru telefonu komórkowego kolegi. Pamięta tylko, że były to cyfry nieparzyste. Ile maksymalnie prób musi wykonać Kuba, aby dodzwonić się do kolegi?
15. Ile jest wszystkich siedmiocyfrowych numerów telefonicznych, w których nie występuje cyfra 0?
16. Rzucamy czterokrotnie kostką. Wyrzucone liczby oczek są kolejnymi cyframi liczby czterocyfrowej. Podaj, ile spośród otrzymanych w ten sposób liczb jest (a) większych od 6000, (b) podzielnych przez 4.
17. Część A egzaminu zawiera 8 pytań, część B - 10 pytań. Student wybiera 6 pytań z części A i 9 z części B. Na ile sposobów może wybrać pytania?
18. Ile elementów ma zbiór, jeśli liczba wszystkich jego niepustych podzbiorów jest równa (a) 127, (b) 255.
19. Zbiór n-elementowy dzielimy na dwa niepuste rozłączne podzbiory. Podaj liczbę takich podziałów dla (a) n=5, (b) n=7.
20. Na ile sposobów można wybrać dziesięć monet, mając nieograniczony zapas groszy oraz pięcio-, dziesięcio- i pięćdziesięciogroszówek?

21. 12 identycznych listów ma zostać wrzuconych do czterech różnych skrzynek pocztowych. (a) Na ile sposobów można to zrobić? (b) Ile jest możliwych sposobów, jeśli do każdej ze skrzynek muszą trafić co najmniej dwa listy?

22. Na ile sposobów można rozmieścić 14 identycznych przedmiotów w 3 pudełkach tak, aby w jednym z pudełek znalazło się co najmniej 8 przedmiotów?

23. Ile jest liczb, które w zapisie dwójkowym (binarnym) mają nie więcej niż 5 cyfr.

24. Ile jest liczb, które w zapisie dwójkowym (binarnym) mają 10 cyfr i cyfra 1 występuje dokładnie 7 razy?

25. Dziewięciu posłów - czterech z partii A i pięciu z partii B zajmuje wspólną dziewiecioosobową ławę na sali sejmowej. Postanowili oni zająć miejsca w ten sposób, że żaden nie ma za sąsiada posła ze swojej partii. Na ile sposobów posłowie mogą zasiąść w ławie?

26. W partii 40 monitorów komputerowych 4 są uszkodzone. Wybieramy 3 monitory. Na ile sposobów można dokonać takiego wyboru, żeby jeden z wybranych monitorów był uszkodzony?

27. Na parkingu salonu samochodowego stoi 15 samochodów tej samej marki. Cztery samochody są czarne, trzy srebrne, a pozostałe granatowe. Wybieramy trzy samochody. Na ile sposobów można dokonać wyboru, jeśli wszystkie wybrane samochody mają być (a) w różnych kolorach, (b) w tym samym kolorze?

28. Ile dzielników naturalnych, różnych od 1, ma liczba $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$?

29. Ile różnych 3-kolorowych chorągiewek można wykonać z sześciu różnych barw, jeżeli barwy nie mogą się powtarzać?

30. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej n, $\sum_{k=1}^{n} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = n2^{n-1}$.

31. Udowodnić, że: $k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = n \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right)$ dla $n, k \in \mathbb{N}$ i $n \geqslant k$.