Zliczanie

Materiały pomocnicze do wykładu

wykładowca: **dr Magdalena Kacprzak**

Zliczamy relacje

Problem

Niech X będzie zbiorem n elementowym.
Ile różnych relacji binarnych można określić w tym zbiorze?

Rozwiązanie

Każdą relację binarną, określoną w zbiorze skończonym, można przedstawić w postaci kwadratowej tablicy, której wiersze i kolumny są oznaczone elementami zbioru X.

Fakt zachodzenia relacji między elementami x i y jest zaznaczony np. jedynką w kratce o współrzędnych (x,y).

Zadanie obliczenia liczby różnych relacji binarnych sprowadza się do sprawdzenia, na ile sposobów można umieścić jedynki w tablicy $n \times n$?

Rozwiązanie c.d.

	1	2	3	.....	n
1	1	0	0	1	1
2	1	1	0	0	1
3	0	1	0	0	0
.....	1	0	1	1	0
n	0	0	1	0	0

Rozwiązanie c.d.

Mamy n^2 kratek.

W każdej kratce możemy wstawić 0 lub 1.

Zatem jest

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{n \cdot n}$$

możliwości uzupełnienia tablicy.

Lemat

W zbiorze n elementowym można określić $2^{n \cdot n}$ relacji binarnych.

Problem

Niech X będzie zbiorem n elementowym. Ile różnych relacji zwrotnych można określić w tym zbiorze?

Rozwiązanie

Tablica incydencji, opisująca relację zwrotną, ma bardzo charakterystyczną cechę: wszystkie miejsca na głównej przekątnej są wypełnione jedynkami. Inne miejsca w tablicy mogą być wypełnione jedynkami lub nie.
Czyli, aby utworzyć relację zwrotną musimy wypełnić jedynkami wszystkie pozycje na przekątnej i dowolne spośród n^2-n (dlaczego?) pozycji pozostałych.

Rozwiązanie c.d.

	1	2	3	.....	n
1	1	0	0	1	1
2	1	1	0	0	1
3	0	1	1	0	0
.....	1	0	1	1	0
n	0	0	1	0	1

Rozwiązanie c.d.

Odpowiedniość między relacją zwrotną i zbiorem wypełnionych kratek jest wzajemnie jednoznaczna. Zatem liczba relacji zwrotnych w zbiorze n elementowym jest równa liczbie podzbiorów zbioru (n^2-n)-elementowego. Stąd dochodzimy do wniosku, że jest dokładnie $2^{(n-1)n}$ relacji zwrotnych.

Lemat

W zbiorze n-elementowym można określić $2^{(n-1)n}$ relacji zwrotnych.

Problem

Niech X będzie zbiorem n elementowym. Ile różnych relacji symetrycznych można określić w tym zbiorze?

Rozwiązanie c.d.

Aby zdefiniować relację symetryczną wystarczy wypełnić w dowolny sposób jedynkami pozycje na i poniżej głównej przekątnej, a potem "odbić" wybrany zbiór względem przekątnej, tzn.
jeśli zaznaczona była pozycja (x,y), to dopisujemy też jedynkę na pozycji (y,x).
Ponieważ początkowy wybór dotyczył tylko $n(n+1)/2$ (dlaczego?) par, zatem jest dokładnie $2^{(n+1)n/2}$ różnych relacji symetrycznych.

Rozwiązanie c.d.

	1	2	3	.....	n
1	1	1	0	1	0
2	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	1
.....	1	0	1	1	0
n	0	0	1	0	1

$$n+(n-1)+(n-2)+...+2+1=n(n+1)/2$$

Lemat

W zbiorze n-elementowym można określić $2^{(n+1)n/2}$ relacji symetrycznych.

Problem

Ile relacji zwrotnych i symetrycznych można określić w zbiorze n elementowym?

Rozwiązanie

$2^{(n-1)n/2}$ relacji, bo wypełniamy dowolnie tylko pozycje tablicy $n \times n$ poniżej przekątnej.

	1	2	3	.....	n
1	1	1	0	1	0
2	1	1	1	0	0
3	0	1	1	1	1
.....	1	0	1	1	0
n	0	0	1	0	1

$(n-1)+ (n-2)+(n-3)...+2+1=(n-1)n/2$

Zliczamy podziały zbiorów

Liczba Stirlinga

Liczbą Stirlinga drugiego rodzaju

S(n,k) nazywamy liczbę podziałów zbioru n-elementowego na k części (bloków).

Przykład 1

Zbiór {1,2,3} ma 3 możliwe podziały na 2 bloki:

{{1}, {2,3}}, {{2}, {1,3}}, {{3}, {1,2}}.

Ten sam zbiór ma tylko 1 możliwy podział na 3 części, a mianowicie

{{1}, {2}, {3}}.

Odpowiadające tym podziałom liczby Stirlinga wynoszą S(3,2)=3, S(3,3)=1.

Przykład 2

Zbiór {a,b,c,d} ma aż 7 różnych podziałów na 2 części:

{{a,b},{c,d}}, {{a,c},{b,d}},
{{a,d}, {b,c}}, {{a,b,c}, {d}},
{{a,b,d},{c}}, {{a,c,d},{b}},
{{c,b,d}, {a}}.

Zatem S(4,2) = 7.

Liczba Stirlinga

Wprost z definicji wynika, że

- $S(n,k) = 0$, gdy $k>n$
- $S(n,n) =1$,
- $S(n,1) = 1$,
- $S(n,0) = 0$ dla $n>0$.

Liczba Stirlinga

Liczby Stirlinga II rodzaju można generować używając zależności rekurencyjnej:

$$S(n,k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1,k)$$

Uzasadnienie

Załóżmy, że rozważany przez nas zbiór n-elementowy X składa się z liczb naturalnych 1,2,...,n. Wszystkie podziały tego zbioru na k bloków (części) można podzielić na dwa typy:

- podziały, które zawierają blok jednoelementowy {n},
- podziały, w których liczba n występuje w większych blokach.

Uzasadnienie c.d.

Jeśli mamy podzielić zbiór n-elementowy na k części, ale ustalimy równocześnie, że jedną z tych części jest zbiór jednoelementowy {n}, to pozostałe elementy trzeba rozdzielić na k-1 bloków. Zatem, liczba podziałów, w których jedna z części to zbiór jednoelementowy {n}, wynosi

$$S(n-1, k-1).$$

Uzasadnienie c.d.

Jeśli natomiast rozważamy podziały, w których liczba n nie może sama tworzyć bloku, to wystarczy wziąć dowolny podział zbioru (n-1)-elementowego na k bloków i do jednego z nich dopisać liczbę n. Liczbę n możemy dopisać na k sposobów, a podziałów zbioru (n-1)-elemememtowego na k części jest S(n-1,k). Razem $k \cdot S(n-1,k)$ podziałów.

Uzasadnienie c.d.

Wynika stąd następująca zależność rekurencyjna:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k).$$

Przykład

Korzystając kilkakrotnie z tego wzoru, z łatwością wyliczymy na przykład, że $S(7,3) = 301$. Rzeczywiście,

$S(7,3)=S(6,2)+3\cdot S(6,3)=$
$[S(5,1)+2\cdot S(5,2)]+3\cdot[S(5,2)+3\cdot S(5,3)]=$
$S(5,1)+5\cdot S(5,2)+3^2\cdot[S(4,2)+3\cdot S(4,3)]=\ldots$
$=S(5,1)+5\cdot S(4,1)+19\cdot S(3,1)+65\cdot S(2,1)+$
$130\cdot S(2,2)+81\cdot S(3,3) = 301.$

Trójkąt Stirlinga

Do wyliczenie wartości S(n,k) dla danych liczb n i k można użyć pomocniczej tablicy.

Ustawmy wartości S(n,k) w postaci trójkątnej tablicy, zwanej trójkątem Stirlinga:

Trójkąt Stirlinga

(3,2)=(2,1)+2*(2,2)

(0,0)				
(1,0)	(1,1)			
(2,0)	(2,1)	(2,2)		
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	
(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

Trójkąt Stirlinga

Wypełnienie pozycji S(n,k) w n-tym wierszu i k-tej kolumnie trójkąta Stirlinga polega na dodaniu do siebie liczby S(n-1,k-1) (z poprzedniego wiersza i poprzedniej kolumny) i, pomnożonej przez k, liczby S(n-1,k) (z poprzedniego wiersza i tej samej kolumny). Wyliczenie wartości w jakimś wierszu wymaga więc wyliczenia i zapamiętania wartości z wiersza poprzedniego.

Trójkąt Stirlinga

S(n,k)	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Trójkąt Stirlinga

Algorytm wypełniający fragment tego trójkąta (do k-tej kolumny) może wyglądać następująco:

```
procedure Stirling(n,k)
{for i :=1 to n do S(i,0) := 0; S(i,1):=1; od;
  for i := 0 to n do S(i,i) := 1 od;
  for i := 3 to n do
          for j := 2 to k do
                    S(i,j) := S(i-1,j-1) + j·S(i-1,j)
          od
  od
 }
```

Liczby Bella

Rozważmy sumę n-tego wiersza Trójkąta Stirlinga. Suma ta to liczba wszystkich podziałów zbioru n-elementowego. Nazywamy ją **liczbą Bella** i oznaczamy B_n

$$B_n=S(n,0)+S(n,1)+S(n,2)+\ldots.+S(n,n)$$

Kilka pierwszych liczb Bella:1,1,2,5,15,52,203,877

Liczby Bella

Liczby Bella spełniają następującą zależność rekurencyjną

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$$

Liczby Bella

Dowód

Wybierzmy i ustalmy w n+1 elementowym zbiorze X pewien element x. Najpierw policzymy ile jest podziałów zbioru X takich, że blok zawierający x ma dokładnie i+1 elementów. Pozostałe i elementów tego bloku może zostać wybranych ze zbioru X na $\binom{n}{i}$ sposobów.

Liczby Bella

Każdy taki blok możemy rozbudować do podziału zbioru X poprzez podzielenie pozostałych n-i elementów na bloki. Podział taki jest możliwy na B_{n-i} sposobów. Zatem otrzymujemy

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$$

Problem

Niech X będzie zbiorem n elementowym. Ile różnych relacji równoważności można określić w tym zbiorze?

Rozwiązanie

Relacja równoważności jest to relacja binarna, która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Przypomnijmy jeszcze, że każda relacja równoważności wyznacza podział zbioru, w którym została określona, na rozłączne i niepuste podzbiory, i odwrotnie, każdy podział zbioru jednoznacznie wyznacza relację równoważności, której klasami abstrakcji są właśnie zbiory danego podziału.

Rozwiązanie c.d.

Wynika stąd, że aby policzyć ile różnych relacji równoważności można określić w pewnym zbiorze X, wystarczy zbadać ile jest różnych podziałów tego zbioru.

Rozwiązanie c.d.

Relacja równoważności określona w zbiorze skończonym n-elementowym może mieć i klas abstrakcji, gdzie $i=1,2,\ldots n$.

Ponieważ różnych relacji równoważności posiadających i klas abstrakcji jest tyle ile podziałów zbioru n-elementowego na i bloków, to zachodzi poniższe twierdzenie.

Twierdzenie

Liczba różnych relacji równoważności jakie możemy zdefiniować w zbiorze n-elementowym wynosi

$$\Sigma_{k=1,\ldots,n} S(n,k).$$

Zliczamy surjekcje

Lemat

Liczba funkcji odwzorowujących X na Y gdzie $|X|=n$ i $|Y|=k$, wynosi

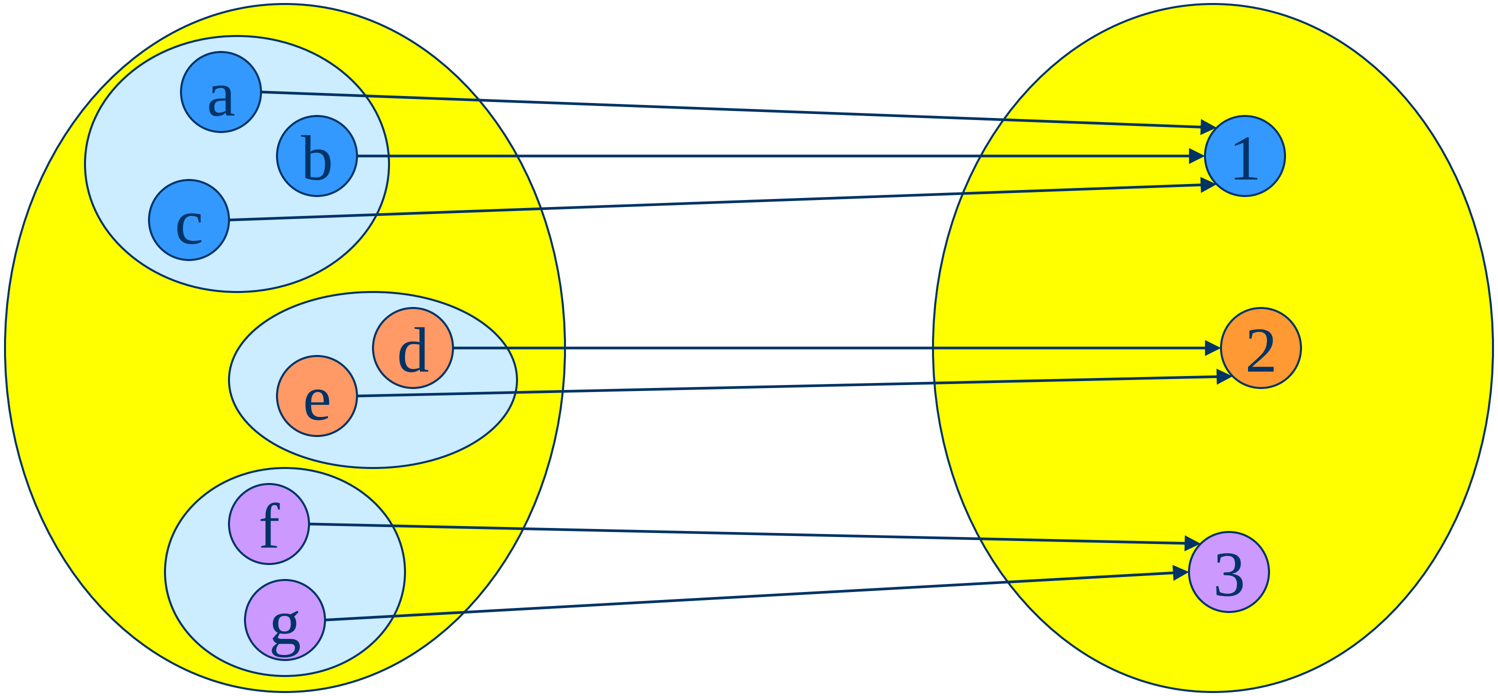
$$k!\cdot S(n,k).$$

Uzasadnienie

Załóżmy, że f jest funkcją określoną w pewnym skończonym zbiorze X i o wartościach w zbiorze Y, przy czym moc zbioru X jest nie mniejsza niż moc zbioru Y, $|Y| \leq |X|$.

Zauważmy, że jeśli $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ i dana jest jakaś funkcja całkowita $f: X \to^{na} Y$, to kładąc $X_i = f^{-1}(\{y_i\})$ dla $i=1,2,\ldots k$, otrzymujemy podział zbioru X na k części.

Uzasadnienie c.d.



Uzasadnienie c.d.

Rzeczywiście, gdyby zbiory X_i i X_j , dla $i \neq j$, miały jakiś element wspólny x, to na mocy definicji przeciwobrazu byłoby $f(x) = y_i$ oraz $f(x) = y_j$, co nie jest możliwe, bo f jest funkcją. Żaden ze zbiorów X_i nie jest pusty, bo każdy element zbioru Y jest wartością funkcji zgodnie z założeniem, że f jest surjekcją. Ponadto, skoro funkcja f jest całkowita, to każdemu elementowi x przypisano wartość w zbiorze Y, np. y_i, ale wtedy $x \in X_i$. Wynika stąd, że suma wszystkich zbiorów $X_1,\ldots,X_k$ to X.

Uzasadnienie c.d.

Z drugiej strony, jeśli mamy podział zbioru X na k części, $X_1,\ldots,X_k$ to przypisując tym częściom elementy zbioru Y określamy funkcję z X na Y.

Na przykład, możemy ją określić następująco:

$f(x) = y_1$ wttw $x \in X_1$,

$f(x) = y_2$ wttw $x \in X_2$,

………..

$f(x) = y_k$ wttw $x \in X_k$.

Uzasadnienie c.d.

Jest to dobrze określona funkcja całkowita, bo zbiory $X_1, \ldots, X_k$ są zgodnie z definicją podziału parami rozłączne. Element y_1 przypisany wszystkim elementom zbioru X_1 został wybrany dość arbitralnie: równie dobrze mogliśmy wybrać każdy inny element zbioru Y. Mamy zatem dokładnie k! (wszystkie permutacje elementów zbioru Y) różnych funkcji odpowiadających temu samemu podziałowi.

Uzasadnienie c.d.

Ponieważ liczba podziałów zbioru X na k części wyraża się liczbą Stirlinga S(n,k), zatem liczba funkcji odwzorowujących X na Y, wynosi

$$k!\cdot S(n,k).$$

Pytanie

Na ile sposobów możemy rozdać 5 różnych książek trójce dzieci, tak aby każde z nich dostało co najmniej jedną?

$$3!S(5,3)=150$$

Zasada włączania i wyłączania

Problem

Niech $X_1,\ldots,X_n$ będą zbiorami skończonymi i niech

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_n.$$

Jak zależy liczba elementów zbioru X od liczby elementów zbiorów $X_1,\ldots,X_n$?

Przykład 1

Rozważmy najpierw sytuację gdy n=2,
tzn. $X = X_1 \cup X_2$.

Jeśli $X_1 = \{1,2\}$, $X_2 = \{3,4,5\}$.
Wtedy

$$|X_1 \cup X_2| = |\{1,2,3,4,5\}| = |X_1| + |X_2| = 2+3=5.$$

Przykład 1

Jeśli $X_1 = \{1,2,3\}$, $X_2 = \{ 2,3,4,5\}$.
Wtedy

$$|X_1 \cup X_2| = |\{1,2,3,4,5\}| = 5 \neq |X_1| + |X_2| = 3+4.$$

Przykład 1

Jeśli zbiory X_1, X_2 są rozłączne, to

$$|X|=|X_1|+|X_2|.$$

Jeśli natomiast zbiory X_1, X_2 nie są rozłączne, to sumując po prostu $|X_1|+|X_2|$, elementy należące do przecięcia policzylibyśmy dwa razy.

Prowadzi to do konkluzji zawartej w poniższym lemacie.

Lemat

Dla dowolnych zbiorów skończonych X_1 , X_2,

$$|X_1 \cup X_2| = |X_1| + |X_2| - |X_1 \cap X_2|.$$

Przykład 2

Zbadajmy teraz przypadek trzech zbiorów. Niech

$$X_1=\{0,1,2,3\},$$
$$X_2=\{0,2,3,4,5,6,7,8\},$$
$$X_3=\{0,6,7,8,9\}.$$

Jeśli dodamy $|X_1|+|X_2|+|X_3|$, to w tej sumie 2 i 3 zostało policzone 2 razy, bo te elementy występowały zarówno w X_1 jak i w X_2 .

Przykład 2

Elementy 6, 7, 8 też zostały policzone dwukrotnie, bo występowały w X_2 i X_3 .

Element 0 występuje we wszystkich trzech zbiorach, więc w sumie policzyliśmy go trzykrotnie.

Przykład 2

Zatem

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3| =$$
$$|\{0,1,2,3\}|+|\{0,2,3,4,5,6,7,8\}|+ |\{0,6,7,8,9\}|$$
$$-|\{0,2,3\}|-|\{0, 6,7,8\}|-|\{0\}|$$
$$+|\{0\}| =$$
$$4+8+5-3-4-1+1=10.$$

Lemat

Dla dowolnych zbiorów skończonych X_1, X_2, X_3,

$$|X_1 \cup X_2 \cup X_3| = |X_1| + |X_2| + |X_3| +$$
$$- |X_1 \cap X_2| - |X_1 \cap X_3| - |X_2 \cap X_3| +$$
$$+ |X_1 \cap X_2 \cap X_3|.$$

Wzór przedstawiony w poprzednim lemacie uogólnia się na dowolną liczbę zbiorów skończonych o czym mówi kolejne twierdzenie.

Twierdzenie:
Zasada włączania i wyłączania

Dla dowolnych zbiorów skończonych $X_1, X_2, \ldots, X_n$,

$$|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = \sum_{i=1}^{n} |X_i| - \sum_{1 \le i, j \le n} |X_i \cap X_j| +$$

$$\sum_{1 \le i, j, k \le n} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{1 \le i, j \le n} |X_1 \cap X_2 \ldots \cap X_n|$$

Twierdzenie:

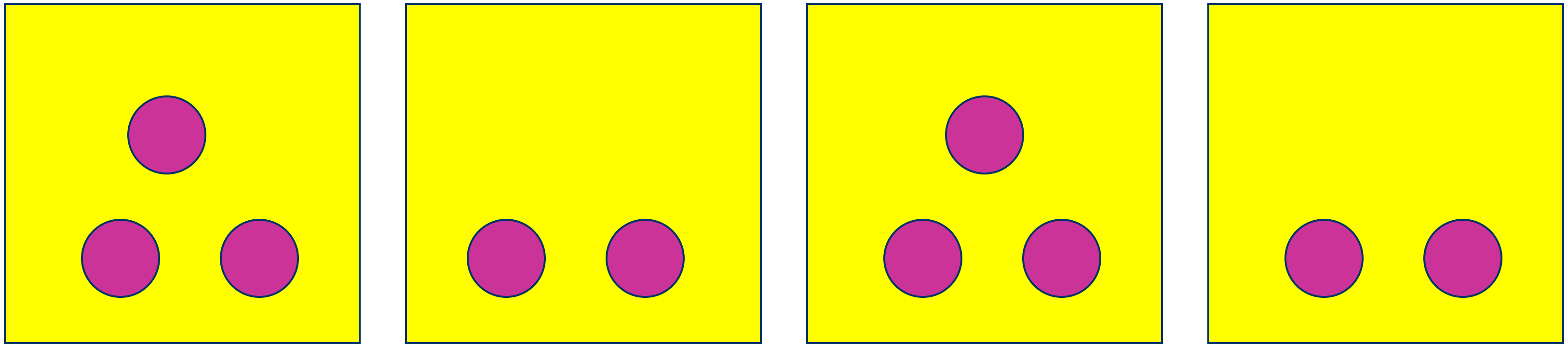
Jeżeli |X| = m i |Y| = n, to liczba wszystkich funkcji całkowitych z X na Y jest równa

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^m$$

Zasada szufladkowa Dirichleta

Przykład

Jeśli mamy 10 przedmiotów, a tylko 4 szufladki, do których chcemy te przedmioty włożyć, to co najmniej jedna z szufladek będzie zawierała więcej niż jeden przedmiot.



Twierdzenie: Zasada szufladkowa Dirichleta

Jeśli skończony zbiór X podzielimy na n podzbiorów, to co najmniej jeden z podzbiorów będzie miał co najmniej

$$\frac{|X|}{n}$$

elementów.

Uzasadnienie

Gdyby każdy z podzbiorów, na które podzielimy zbiór X miał mniej elementów niż |X|/n , to moc sumy tych zbiorów byłaby mniejsza niż |X|.

Przykład

W grupie 13 osób muszą być co najmniej dwie, które urodziły się w tym samym miesiącu.

Weźmy 12 szufladek z nazwami miesięcy i wkładajmy do nich osoby, które urodziły się w danym miesiącu. Ponieważ osób jest 13, a szufladek 12, w jednej z nich muszą być co najmniej dwie osoby.

Twierdzenie
(inne sformułowanie zasady szufladkowej Dirichleta)

Niech f będzie funkcją całkowitą określoną na zbiorze X, $f: X \to Y$ oraz niech $|X| > k \cdot |Y|$. Wtedy co najmniej dla jednego y, przeciwobraz $f^{-1}(\{y\})$ ma więcej niż k elementów.

Przykład 1

Przypuśćmy, że pewne 9 osób O_1, ..., O_9, waży razem 810kg. Czy dowolna trójka tych osób może wsiąść do windy o udźwigu 250 kg?

Przykład 1

Rozważmy tablicę:

$$
\begin{array}{cccccccc}
O_1 & O_2 & O_3 & \ldots & O_7 & O_8 & O_9 \\
O_2 & O_3 & O_4 & \ldots & O_8 & O_9 & O_1 \\
O_3 & O_4 & O_5 & \ldots & O_9 & O_1 & O_2
\end{array}
$$

Suma wag w każdym wierszu tablicy wynosi 810kg, czyli razem w trzech wierszach mamy 2430kg.

Przykład 1

Kolumny tej tablicy tworzą 9 różnych trójek.
Na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, przynajmniej w jednej kolumnie suma wag wynosi co najmniej 2430/9 = 270kg.

Czyli istnieje (co najmniej jedna) taka trójka osób, które **nie mogą** razem wsiąść do windy.

Przykład 2

Pewna Uczelnia zatrudnia 5 profesorów reprezentujących 4 różne specjalności. Przewiduje się, że na koniec roku akademickiego 40 studentów tej Uczelni będzie chciało bronić swoich prac magisterskich. W każdej komisji egzaminacyjnej, zgodnie z przyjętymi ustaleniami, powinno brać udział 3 profesorów reprezentujących różne specjalności. Udowodnić, że przynajmniej jedna z komisji będzie musiała uczestniczyć w co najmniej 6 egzaminach.

Przykład 2

Rozwiązanie.

Oznaczmy profesorów-specjalistów w tej samej dziedzinie przez A i B. Wszystkie komisje trzyosobowe możemy podzielić na 3 kategorie:

1. takie, w których nie uczestniczą ani A ani B,
2. takie, w których uczestniczy A, a nie uczestniczy B i
3. takie, w których uczestniczy B, a nie uczestniczy A.

Przykład 2

Jest tylko jedna komisja 1go rodzaju, oraz 3 komisje drugiego i 3 komisje trzeciego rodzaju (wybieramy dwóch pozostałych członków komisji spośród trzech profesorów, czyli (3 nad 2)). Możliwych komisji jest więc 7.

Przykład 2

Określmy funkcję f, która każdemu magistrantowi przypisuje komisję egzaminacyjną.

Ponieważ $40>5\cdot 7$, zatem na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, co najmniej dla jednego x, przeciwobraz $f^{-1}(\{x\})$ ma więcej niż 5 elementów, co oznacza, że co najmniej jedna komisja będzie musiała uczestniczyć w co najmniej 6 egzaminach.

Przykład 3

Niech A będzie ustalonym dziesięcioelementowym podzbiorem zbioru {1,2,...50}. Udowodnić, że w zbiorze A istnieją dwa różne pięcioelementowe podzbiory takie, że sumy wszystkich liczb każdego z nich są równe.

Przykład 3

Rozwiązanie.

Niech X będzie zbiorem wszystkich pięcioelementowych podzbiorów A.
Oczywiście zbiór X składa się z 252 podzbiorów.
Określimy funkcję $f: X \to \{15, \ldots, 240\}$ tak, że dla dowolnego pięcioelementowego zbioru $\{a,b,c,d,e\}$,

$$f(\{a,b,c,d,e\}) = a+b+c+d+e.$$

Przykład 3

Zbiór wartości funkcji f składa się z 226 elementów, bo

$$15 \leq f(\{a,b,c,d,e\}) \leq 240.$$

Zatem, na mocy zasady szufladkowej Dirichleta istnieją co najmniej dwa zbiory należące do X, dla których wartości funkcji f są takie same.

Przykład 4

Pewna grupa osób wita się podając sobie ręce. Nikt nie wita się z samym sobą i żadna para osób nie wita się podwójnie. Czy muszą być dwie osoby, które witały taką samą liczbę osób?

Przykład 4

- Gdy jest n osób, to każda z nich przywita 0 lub 1 lub 2 lub … n-1 osób.
- Utwórzmy n szuflad z etykietami k=0,1,2,…,n-1 i umieśćmy osobę w szufladzie o etykiecie k jeśli witała się z dokładnie k osobami.
- Zauważmy, że nie jest to możliwe, aby równocześnie była osoba, która przywitała wszystkie osoby i taka, która nie przywitała żadnej.
- Zatem n osób zajmie co najwyżej n-1 szuflad, więc w jednej z nich są co najmniej dwie osoby.