Grafy

1. Załóżmy, że na jednym z brzegów rzeki znajdują się pies, kot oraz mysz. Masz do dyspozycji łódkę, która może zabrać oprócz Ciebie jedynie jedno z wymienionych wcześniej zwierząt. Jak przetransportować zwierzęta z jednego brzegu rzeki na drugi, tak aby nigdy nie doszło do sytuacji, w której na dowolnym brzegu pozostaną bez twojej opieki odpowiednio pies z kotem lub kot z myszą. Ile istotnie różnych wariantów przeprawy istnieje?. Sformułuj problem oraz rozwiązanie w terminach teorii grafów.

2. Pokaż, że istnieje taka grupa pięciu osób, w której nie ma ani trzech osób znających się nawzajem, ani trzech osób takich, że żadna z nich nie zna dwóch pozostałych.

3. Dany jest graf niezorientowany $G = (V, E)$, gdzie $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $E = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$. Narysuj ten graf. Wyznacz macierz sąsiedztwa i incydencji. Sprawdź, czy jest to graf prosty, multigraf, regularny, pełny, dwudzielny. Określ stopnie jego wierzchołków.

4. Uzasadnij, że w każdym grafie prostym liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest parzysta.

5. Uzasadnij, że jeżeli graf prosty zawiera co najmniej dwa wierzchołki, to zawiera także co najmniej dwa wierzchołki tego samego stopnia.

6. Udowodnij, że jeżeli w grafie G istnieje droga łącząca dwa różne wierzchołki u i v, to istnieje też droga prosta prowadząca od u do v.

7. Udowodnij, że jeżeli $G = (V, E)$ jest grafem niezorientowanym, spójnym, o n wierzchołkach, to ma co najmniej $n - 1$ krawędzi.

8. Udowodnij, że jeśli $G = (V, E)$ jest grafem niezorientowanym, acyklicznym, o n wierzchołkach, to G ma co najwyżej $n - 1$ krawędzi.

9. Udowodnij, że dla każdego grafu prostego, suma rzędów wszystkich wierzchołków jest liczbą parzystą równą podwojonej liczbie krawędzi.

10. Udowodnij, że w każdym grafie prostym składającym się n wierzchołków tylko nieparzystych stopni, istnieją $n/2$ rozłączne drogi proste, których krawędzie pokrywają zbiór krawędzi rozważanego grafu.

11. Rozcięciem grafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolny pozdbiór E' zbioru E taki, że graf $G' = (V, E \setminus E')$ nie jest grafem spójnym, oraz dla dowolnego zbioru $X \subset E'$ graf $G'' = (V, E \setminus X)$ jest grafem spójnym. Niech A oraz B będą rozcięciami grafu G takimi, że $|A| > |B|$. Sprawdź, czy dla dowolnego grafu G, jeżeli $|B| > 1$, to istnieje taka krawędź e ze zbioru B, że zbiór $A \cup \{e\}$ jest rozcięciem w grafie G.

12. Rozcięciem grafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolny pozdbiór E' zbioru E taki, że graf $G' = (V, E \setminus E')$ nie jest grafem spójnym, oraz dla dowolnego zbioru $X \subset E'$ graf $G'' = (V, E \setminus X)$ jest grafem spójnym. Udowodnij, że jeżeli w grafie istnieją dwa różne rozcięcia zawierające tą samą krawędź, to istnieje także rozcięcie nie zawierające owej krawędzi.

13. Udowodnij, że jeżeli w grafie $G = (V, E)$ istnieją dwa rózne cykle zawierające tą samą krawędź, to istnieje także cykl nie zawierający owej krawędzi.

14. Zbiorem krawędzi niecyklicznych grafu $G = (V, E)$ nazywamy dowolny pozdbiór E' zbioru E taki, że (wszystkie) krawędzie zbioru E' nie tworzą cyklu. Niech A oraz B będą zbiorami krawędzi niecyklicznych grafu G takimi, że $|A| > |B|$. Sprawdź, czy dla dowolnego grafu G, jeżeli $|B| > 1$, to istnieje taka krawędź e ze zbioru $|B|$, że zbiór $A \cup \{e\}$ jest zbiorem krawędzi niecyklicznych w grafie G.

15. Drzewem rozpinającym $T = (V, E')$ grafu spójnego $G = (V, E)$ nazywamy dowolny graf drzewo rozpiety na wierzchołkach ze zbioru V, którego zbiór krawędzi E' zawiera się w zbiorze E. Udowodnij, że jeżeli zbiór krawędzi $C \subseteq E$ grafu G jest nadzbiorem właściwym zbioru krawędzi dowolnego drzewa rozpinającego tego grafu, to elementy zbioru C (nie koniecznie wszystkie) tworzą cykl w grafie G.

16. Czy jest możliwe, aby owad poruszający się wzdłuż krawędzi sześcianu przeszedł każdą krawędź dokładnie raz? Odpowiedź uzasadnij.

17. Graf prosty G nazywamy grafem losowo-eulerowskim, gdy startując z dowolnego wierzchołka owego grafu, i wybierając kolejne możliwe krawędzie w sposób losowy, zawsze otrzymamy cykl eulera. Uzasadnij, czy każdy graf eulerowski jest losowo-eulerowski?

18. Udowodnij, że każdy skończony, zorientowany graf, w którym dowolne dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną krawędzią w jednym z dwóch możliwych kierunków posiada drogę Hamiltona.

19. Rozmieść zera i jedynki na okręgu tak, by każda trzycyfrowa liczba dwójkowa była ciągiem trzech kolejnych symboli na okręgu.

20. Udowodnij, że na dowolnej planszy szachowej rozmiaru $n \times n$, gdzie n jest liczbą nieparzystą, nie istnieje cykl hamiltona dla konika szachowego taki, że konik odwiedza wszystkie pola szachownicy.

21. Udowodnij, że warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by problem kojarzenia małżeństw miał rozwiązanie, jest, by dla każdego zbioru k dziewcząt, wszystkie one łącznie znały co najmniej k chłopców, gdzie $1 \leqslant k \leqslant m$ oraz m jest liczbą wszystkich dziewcząt.

22. Przedsiębiorca budowlany, który poszukuje murarza, cieśli, hydraulika i ślusarza, otrzymuje pięć zgłoszeń: jedno od murarza, jedno od cieśli, jedno od osoby, która może pracować jako murarz i jako hydraulik oraz dwa zgłoszenia od osób, które mogą pracować jako hydraulicy i jako ślusarze. Narysuj odpowiedni graf dwudzielny. Sprawdź, czy w tym przypadku spełniony jest wraunek kojarzenia małżeństw. Czy wszystkie miejsca pracy mogą być obsadzone przez pracowników o odpowiednich kwalifikacjach?

23. Graf prosty $G = (V, E)$, gdzie $\chi(G) = k$ i $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu, nazywamy k-krytycznym, jeżeli usunięcie dowolnego wierzchołka grafu G (wraz z krawędziami z nim incydentymi) prowadzi do grafu $G' = (V', E')$ takiego, że $\chi(G') < k$. Kolejno:

    (a) narysuj dowolny graf 3-krytyczny,

    (b) narysuje dowolny graf 4-krytyczny,

    (c) podaj przykład dowonego grafu hamiltonowskiego składającego się z n wierzchołków, który jest n-krytyczny,

    (d) udowodnij, że jeżli graf G jest k-krytyczny, to każdy wierzchołek grafu ma stopień nie mniejszy niż $k - 1$.

24. Graf prosty $G = (V, E)$, gdzie $\chi(G) = k$ i $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu, nazywamy k-porządkowo-kolorowalnym, gdy kolorując wierzchołki zgodnie z nierosnącą kolejnością ich stopni, zawsze użyjemy nie więcej niż k kolorów (zakładamy, że w każdym wierzchołku grafu dobór barwy jest lokalnie optymalny, tj. pierwsza wolna barwa różna od barw wierzchołków sąsiednich). Uzasadnij, czy każdy graf k-kolorowalny jest k-porządkowo-kolorowalny?

25. Udowodnij, że każde drzewo o n wierzchołkach ma dokładnie $n - 1$ krawędzi.

26. Drzewem wyważonym nazywamy drzewo binarne z wyróżnionym wierzchołkiem korzeniem, w którym dla każdego wierzchołka prawdą jest, że róznica wysokości jego lewego i prawego poddrzewa wynosi -1, 0 albo 1. Kolejno:

    (a) wyznacz maksynalną liczbę wierzchołków drzewa wyważonego wyskości h,

    (b) wyznacz minimalną liczbę wierzchołków drzewa wyważonego wysokości h.

27. Drzewem dwumianowym $D(n)$ stopnia n nazywamy drzewo z wyróżnionym wierzchołkiem korzeniem i zdefiniowane w następujący sposób: $D(0)$ - drzewo składa się z pojedynczego wierzchołka (korzenia), $D(i)$, dla $i > 0$ - drzewo składa się z dwóch poddrzew $D_1(i-1)$ oraz $D_2(i-1)$ połączonych tak, że korzeń drzewa $D_1(i-1)$ jest skrajnie lewym synem korzenia drzewa $D_2(i-1)$. Korzeniem drzewa $D(i)$ jest wierzchołek korzeń drzewa $D_2(i-1)$. Kolejno:

    (a) oblicz z ilu wierzchołków składa się drzewo dwumianowe stopnia n,

    (b) wyznacz wysokość drzewa dwumianowego stopnia n,

(c) określ stopień wierzchołka korzenia drzewa $D(n)$.

28. Grafem krawedziowym $L(G) = (V', E')$ grafu prostego $G = (V, E)$ nazywamy graf, którego zbiór wierzchołków tworzą krawędzie grafu G, tj. $V' = E$, a krawędź (i, j) należy do zbioru E' wttw, gdy w grafie G istnieje wierzchołek v taki, że krawędzie $i = (u, v)$ oraz $j = (v, w)$ należą do zbioru E. Kolejno:

    (a) narysuj graf krawędziowy $L(G)$ grafu G z zadania 3,

    (b) uzasadnij, czy graf krawędziowy $L(G)$ grafu drzewa G, jest także drzewem,

    (c) wyznacz wzór na liczbę krawędzi grafu $L(G)$ w zależności od stopni wierzchołków grafu G,

    (d) podaj przykład grafu eulerowskiego, dla którego graf krawędziowy $L(G)$ jest także grafem eulerowskim,

    (e) uzasadnij, czy graf krawędziowy $L(G)$ grafu eulerowskiego G, jest także grafem eulerowskim,

    (f) uzasadnij, czy graf krawędziowy $L(G)$ grafu hamiltonowskiego G, jest także grafem hamiltonowskim.

29. Grafem dopełniającym $C(G) = (V, E')$ grafu prostego $G = (V, E)$ nazywamy graf taki, że krawędź (u, v) należy do zbioru E' wtedy i tylko wtedy, gdy (u, v) nie należy do zbioru E. Kolejno:

    (a) narysuj graf dopełniający $C(G)$ grafu G z zadania 3,

    (b) uzasadnij, czy graf dopełniający $C(G)$ grafu drzewa G, jest także drzewem,

    (c) wyznacz wzór na liczbę krawędzi grafu $C(G)$ w zależności od stopni wierzchołków grafu G,

    (d) podaj przykład grafu eulerowskiego, dla którego graf dopełniający $C(G)$ jest także grafem eulerowskim,

    (e) uzasadnij, czy graf dopełniający $C(G)$ grafu eulerowskiego G, jest także grafem eulerowskim,

    (f) uzasadnij, czy graf dopełniający $C(G)$ grafu hamiltonowskiego G, jest także grafem hamiltonowskim.