Funkcje

Materiały pomocnicze do wykładu

uczelnia: **PJWSTK**
przedmiot: **Matematyka Dyskretna 1**
wykładowca: **dr Magdalena Kacprzak**

Funkcja:
definicja i intuicje

Definicja funkcji

Niech X i Y będą dowolnymi zbiorami.

Relację binarną $f \subseteq X \times Y$ będziemy nazywać

funkcją

ze zbioru X w zbiór Y, co zapisujemy w postaci

$$\mathbf{f : X \to Y}$$

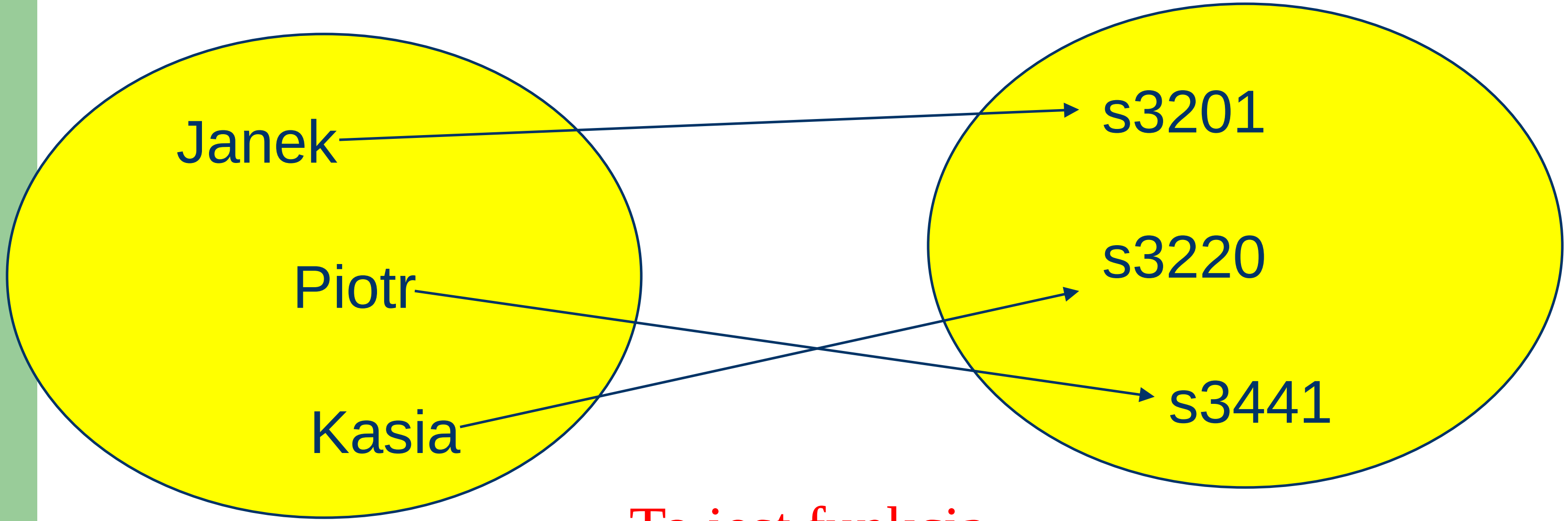
wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ istnieje co najwyżej jeden element $y \in Y$ taki, że $(x,y) \in f$.

Jeżeli para $(x,y) \in f$, to piszemy $y = f(x)$.

Czy ta relacja jest funkcją?

Niech A=zbiór studentów, B=zbiór numerów indeksów

r = {(a,b): b jest numerem indeksu studenta a}

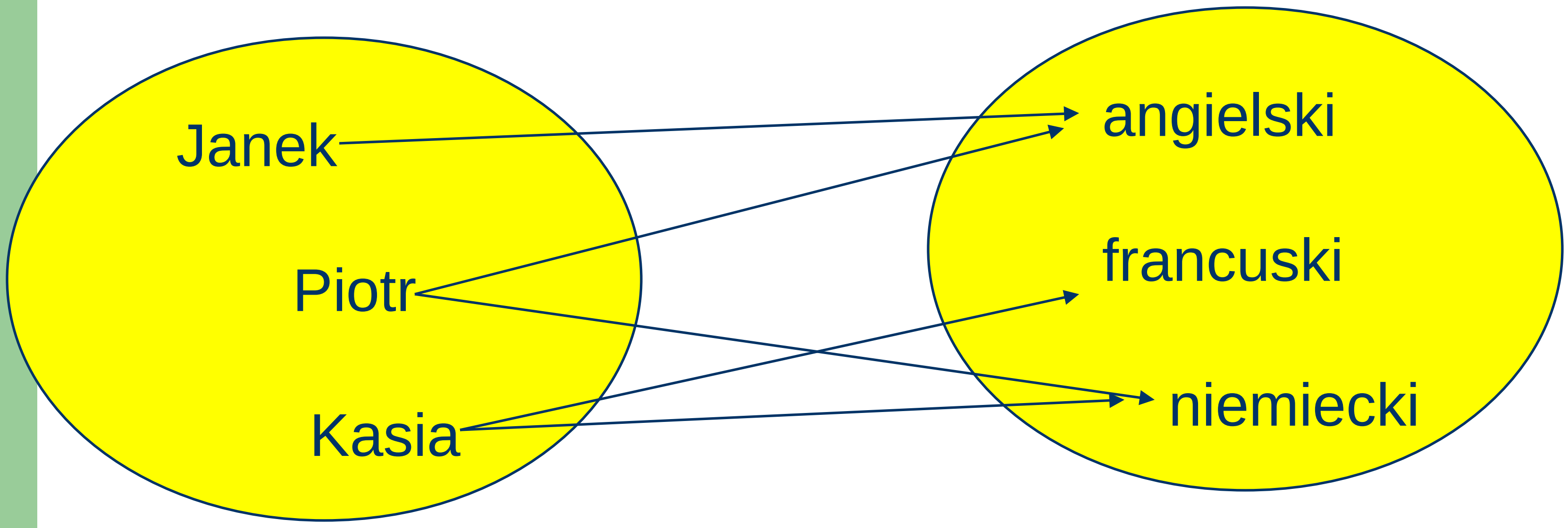


To jest funkcja

Czy ta relacja jest funkcją?

Niech A=zbiór studentów, B=zbiór języków obcych

r = {(a,b): student a płynnie mówi w języku b}



To nie jest funkcja.

Czy ta relacja jest funkcją?

Niech A=zbiór modeli samochodów,

B=zbiór marek samochodów

r = {(a,b): a jest modelem marki b}

Fiesta → Ford

Almera → Nissan

Ibiza → Seat

Patrol → Nissan

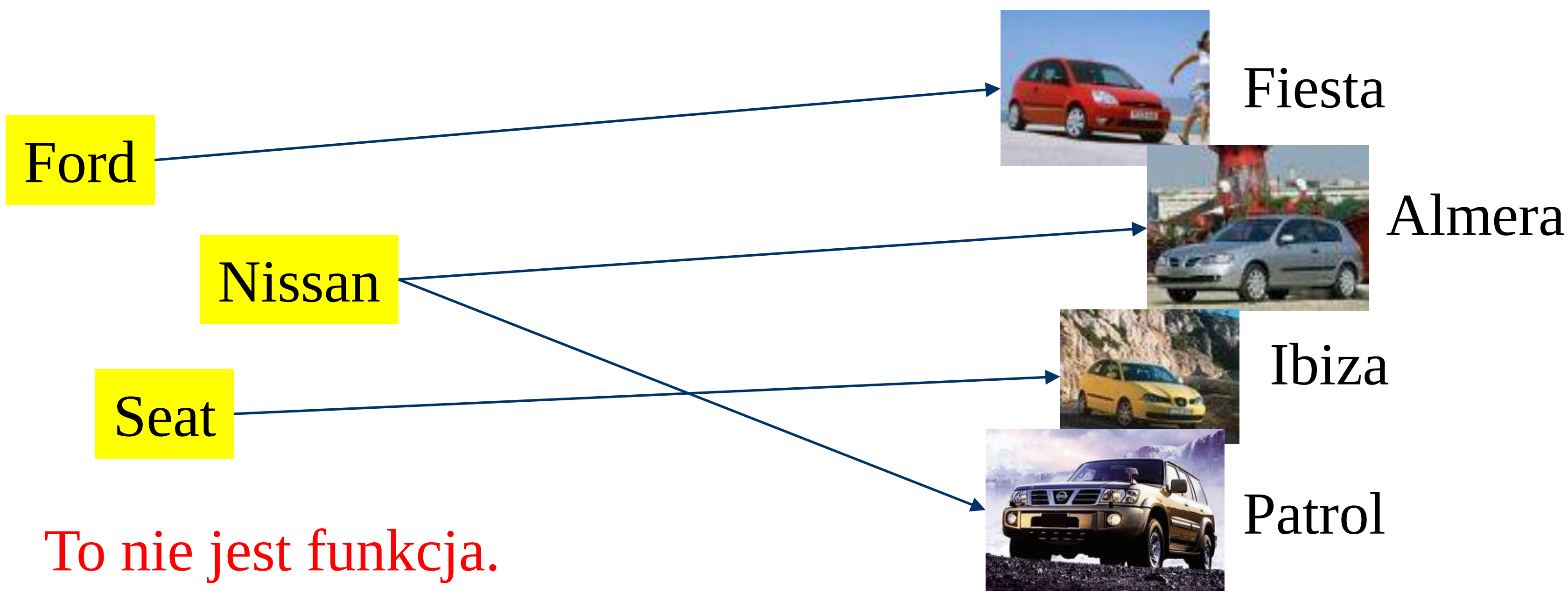
To jest funkcja.

Czy ta relacja jest funkcją?

Niech A=zbiór marek samochodów,

B=zbiór modeli samochodów

r = {(a,b): a jest marką modelu b}



To nie jest funkcja.

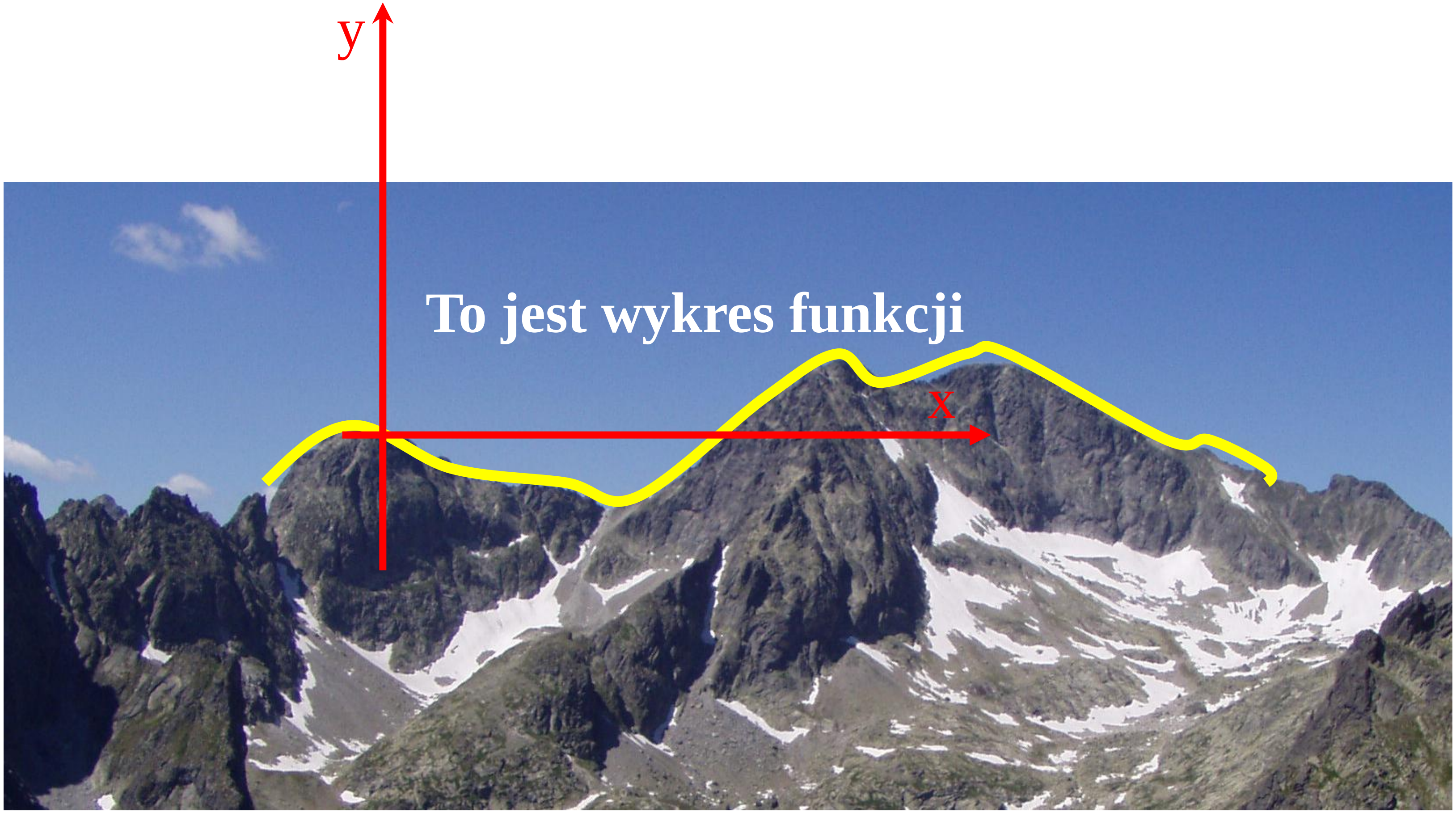
Czy ta relacja jest funkcją?

Niech A=B=zbiór liczb rzeczywistych

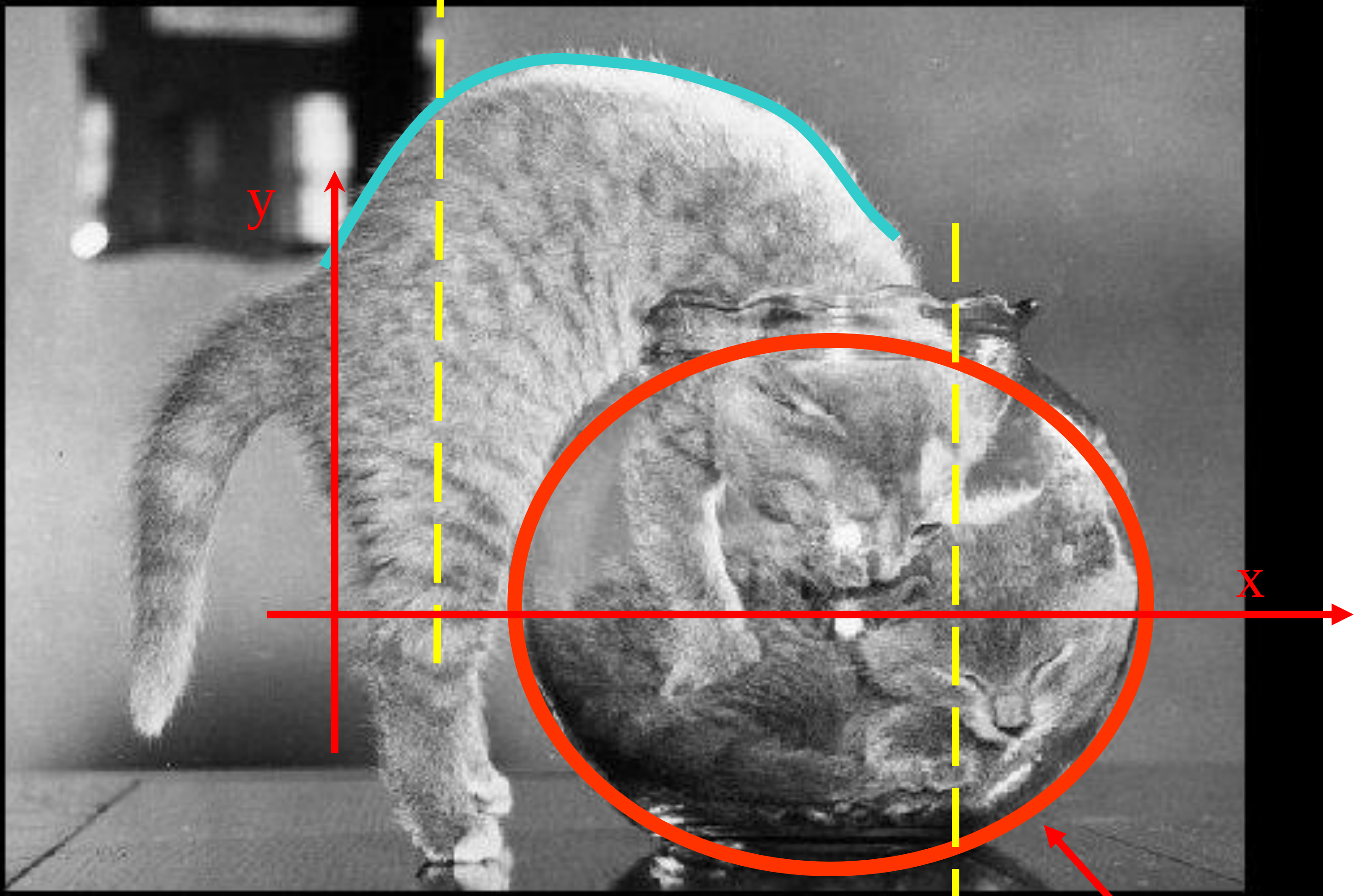
$r = \{(a,b): a+1=|b|\}$

To nie jest funkcja, bo $(0,1)\in r$ i $(0,-1)\in r$

Przykład



I jeszcze jedna funkcja



A to już NIE jest funkcja

Wybrane funkcje w dziedzinie liczb rzeczywistych

- $f(x) = sgn(x)$ – znak liczby x
  - $sgn(x) = 1$ dla $x>0$, $sgn(x) = -1$ dla $x<0$, $sgn(0) = 0$
- $f(x) = \lfloor x \rfloor$ - część całkowita liczby x (największa liczba całkowita mniejsza lub równa x)

Wybrane funkcje w dziedzinie liczb całkowitych

- f(z) = z mod 2 – reszta z dzielenia przez 2
- f(z) = z div 2 – cześć całkowita z dzielenia przez 2, tzn. $\lfloor z/2 \rfloor$
- f(z) = max({z,3})

Wybrane funkcje w dziedzinie liczb naturalnych dodatnich

- $f(n) = \log(n)$ – logarytm o podstawie 10
- $f(n) = \ln(n)$ – logarytm o podstawie e
- $f(n) = \lg(n)$ – logarytm o podstawie 2

Wybrane funkcje w dziedzinie liczb naturalnych

- $f(n) = n!$
- $f(n) = n^2$
- $f(n) = n^n$

Przykłady zastosowania funkcji w definiowaniu programów

Program1

```
begin
    if z=0 then z:=z+1 else
        if
            z<0 then z:=sgn(z)
        fi
    fi
    z:=ln(z);
end
```

Przykłady zastosowania funkcji w definiowaniu programów

Program2

```
begin
        x:=2; z:=0;
        while z<10
        do
            z:=z+1;
            x:=x^x
        od
end
```

Czy i kiedy relacja „wejście-wyjście” jest funkcją?

Rozważmy program

P1(n) = { y:=random({-1,0,1}), x:=n+y; return x}

gdzie n jest liczbą całkowitą i relację r określoną w zbiorze liczb całkowitych taką, że

$$a \ r \ b \text{ wttw } b \in Res(P1(a)),$$

gdzie Res(P1(a)) jest zbiorem możliwych wartości x uzyskanych po wykonaniu programu P1 dla danej wejściowej a.

Czy relacja r jest funkcją?

Czy i kiedy relacja „wejście-wyjście” jest funkcją?

Rozważmy program

P2(n) = {x:=n mod 2; return x}

gdzie n jest liczbą całkowitą i relację r określoną w zbiorze liczb całkowitych taką, że

a r b wttw P1(a)=b.

Czy relacja r jest funkcją?

Argument i wartość funkcji

Element x nazywamy **argumentem** funkcji, a element y **wartością funkcji** lub **obrazem** elementu x.

Zbiór argumentów

Zbiór Dom(f) tych elementów x, którym funkcja f przypisuje wartość, nazywamy

zbiorem argumentów
lub **dziedziną funkcji.**

$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in X : \text{istnieje takie } y \in Y\text{, że } f(x)=y\}$

Zbiór wartości

Zbiór Im(f) tych y, które są wartościami funkcji nazywamy

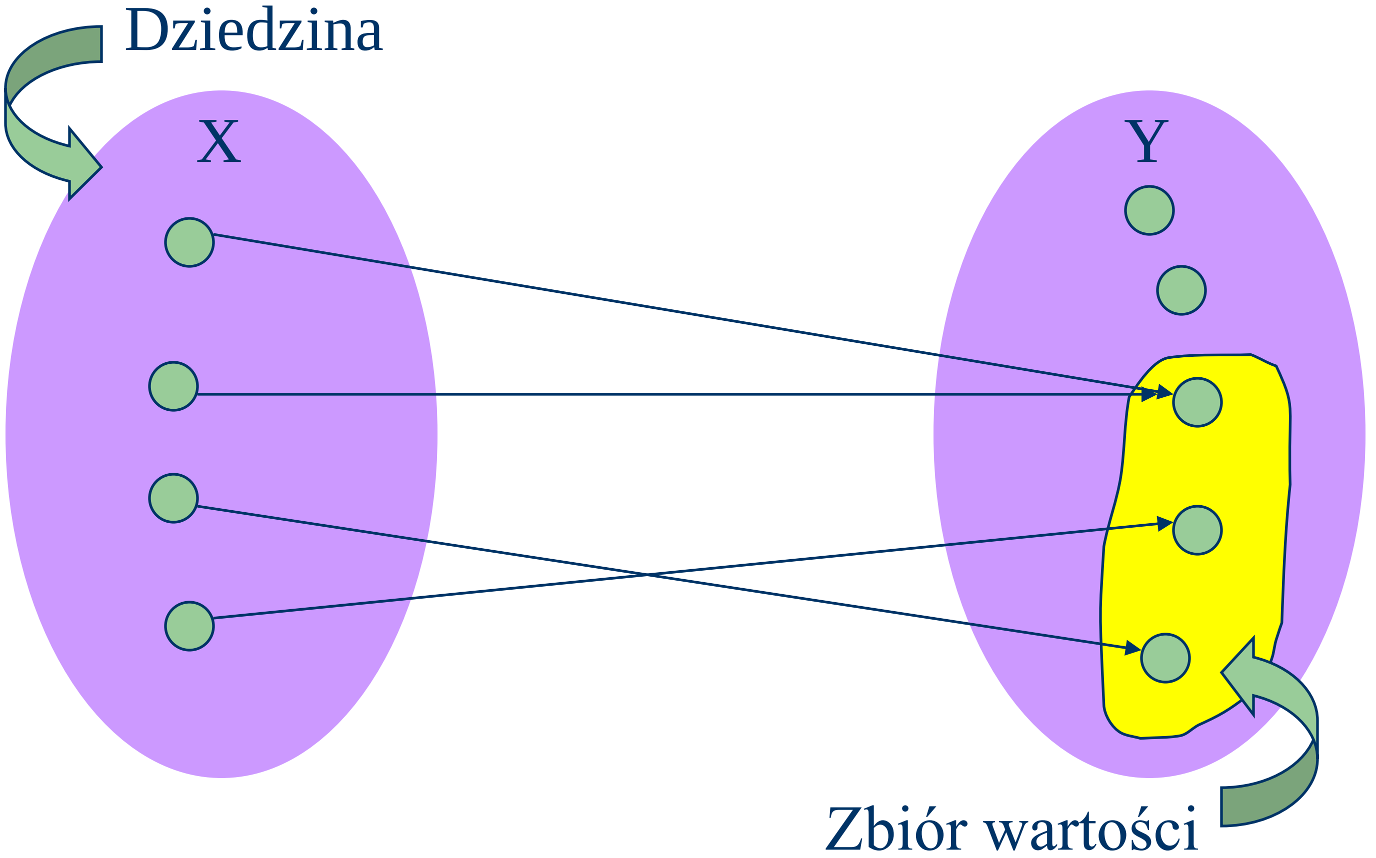
zbiorem wartości

lub **przeciwdziedziną**

funkcji.

$$Im(f)=\{y \in Y : \text{istnieje takie } x \in X, \text{ że } f(x)=y\}$$

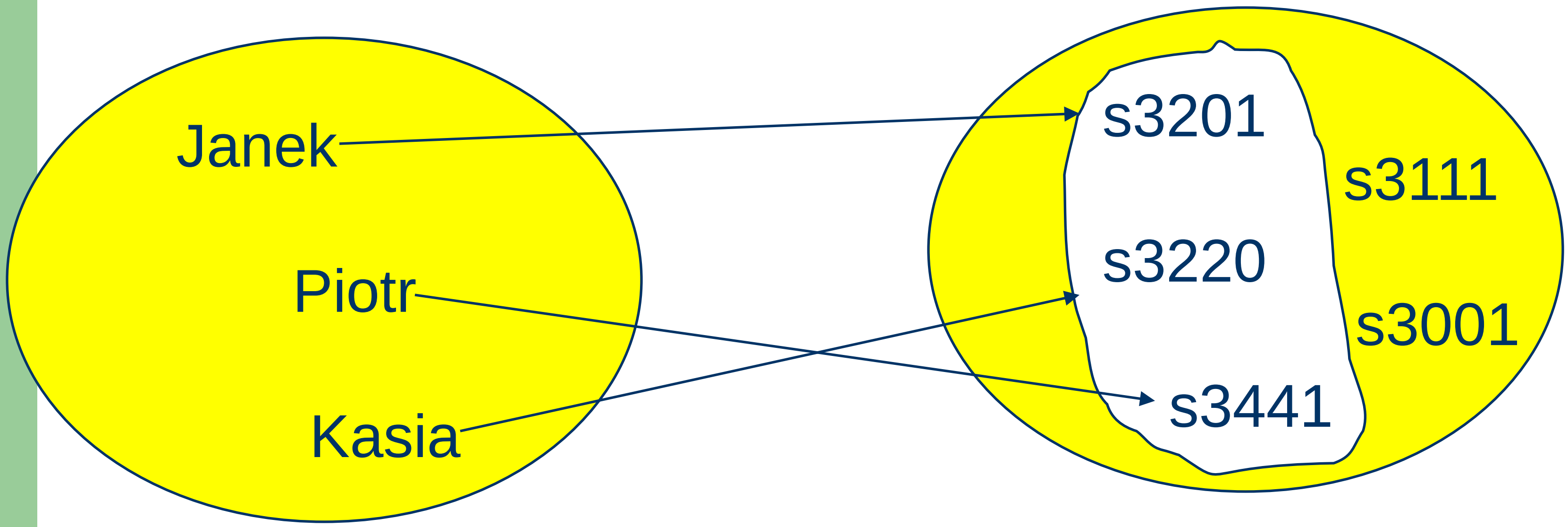
Dziedzina i zbiór wartości



Dziedzina i zbiór wartości

Niech A=zbiór studentów, B=zbiór numerów indeksów

f = {(a,b): b jest numerem indeksu studenta a}



Dom(f)={Janek, Piotr, Kasia}, Im(f)={s3201, s3220, s3441}

Dziedzina

$$f(x) = \frac{x}{x+5}$$ Dom(f)=R\{-5}

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$ Dom(f)={x∈R : x ≥ 2 }

$$f(x) = \lg(2x-1)$$ Dom(f)={x∈R : x > 1/2 }

Zbiór wartości

$$f(x) = 2x + 5$$ Im(f)=R

$$f(x) = x^2 + 1$$ Im(f)=[1,+∞)

$$f(x) = 2^x$$ Im(f)=R^+

Określ dziedzinę i zbiór wartości

Rozważmy program

$$P2(n) = \{x:=n \bmod 2;\ \text{return } x\}$$

gdzie n jest liczbą naturalną.

Niech

$$f(n)=P2(n).$$

Wyznacz Dom(f) i Im(f).

Funkcja całkowita i częściowa

Jeżeli Dom(f) = X, to f jest
funkcją całkowitą.

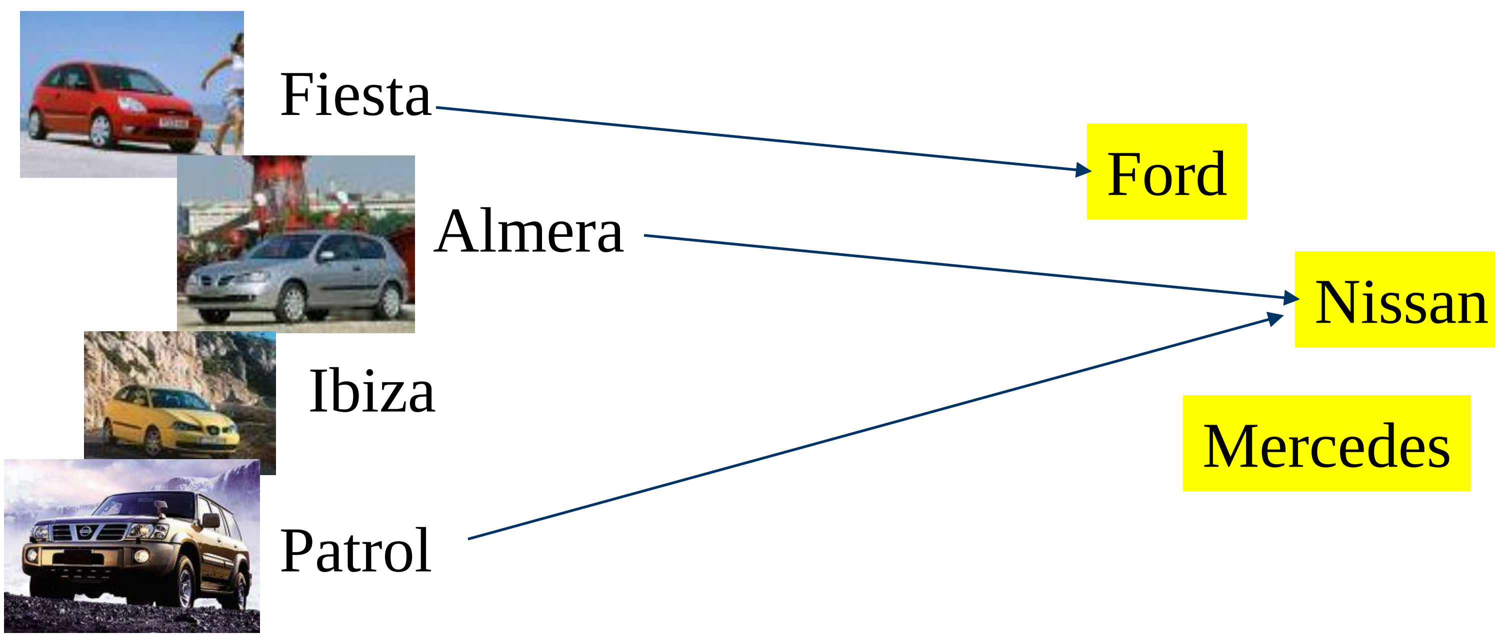
Jeżeli Dom(f) $\subset$ X, to f jest
funkcją częściową.

Funkcja częściowa

Niech A=zbiór modeli samochodów,

B=zbiór marek samochodów

r = {(a,b): a jest modelem marki b}

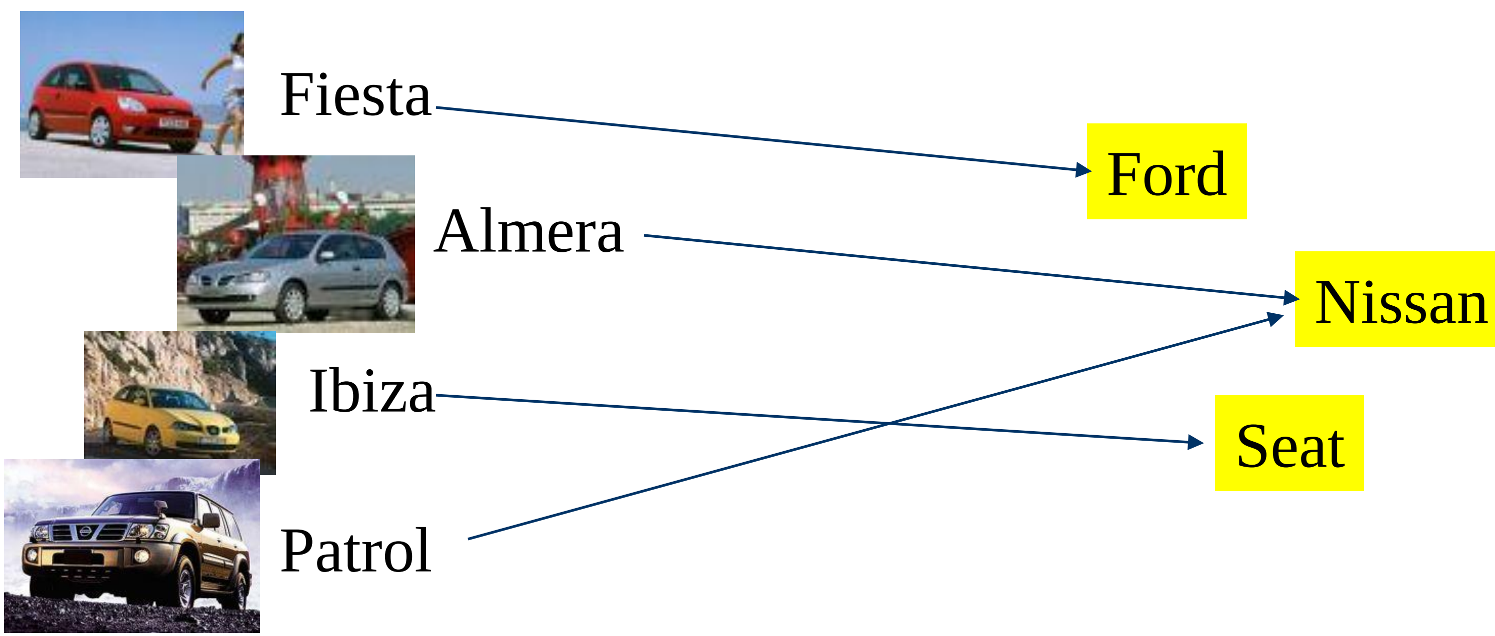


Funkcja całkowita

Niech A=zbiór modeli samochodów,

B=zbiór marek samochodów

r = {(a,b): a jest modelem marki b}



Własności funkcji

Iniekcja (1-1)

Powiemy, że funkcja $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem **różnowartościowym (iniekcją)**, jeżeli różnym argumentom przypisuje różne wartości, tzn. dla każdego $x_1, x_2 \in X$

jeśli $x_1 \neq x_2$, to $f(x_1) \neq f(x_2)$.

inaczej (warunek równoważny)

jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to $x_1 = x_2$.

Suriekcja („na”)

Powiemy, że funkcja $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem

„na” zbiór Y (suriekcją)

wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru Y jest wartością funkcji, tzn.
dla dowolnego $y \in Y$ istnieje $x \in X$, że $f(x)=y$.
Inaczej:

$$\mathbf{Im(f)=Y}$$

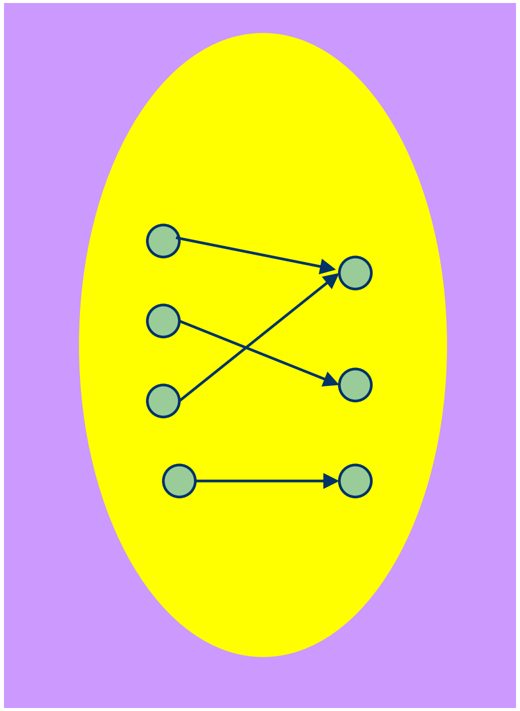
Bijekcja (1-1 i „na”)

Funkcja $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem

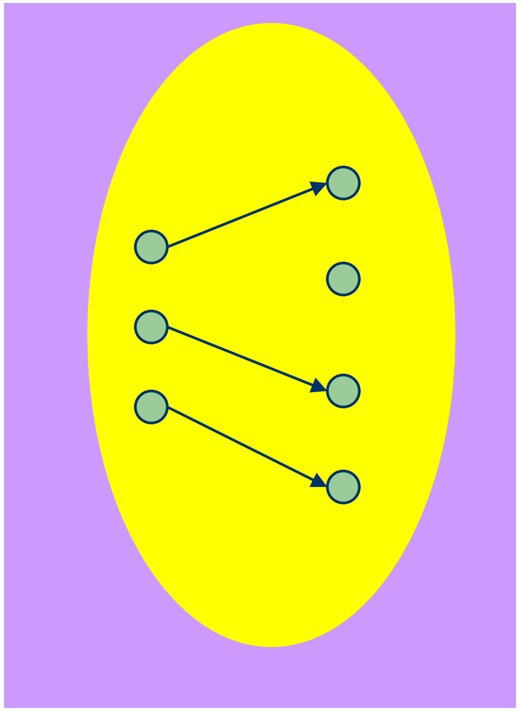
wzajemnie jednoznacznym (bijekcją)

wtedy i tylko wtedy, gdy jest jednocześnie funkcją różnowartościową (iniekcją) i "na„ (suriekcją).

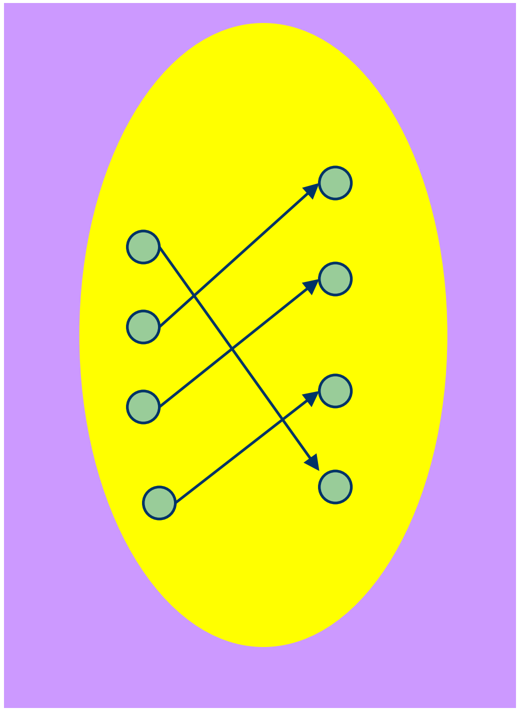
Suriekcja, iniekcja, bijekcja



To jest suriekcja



To jest iniekcja

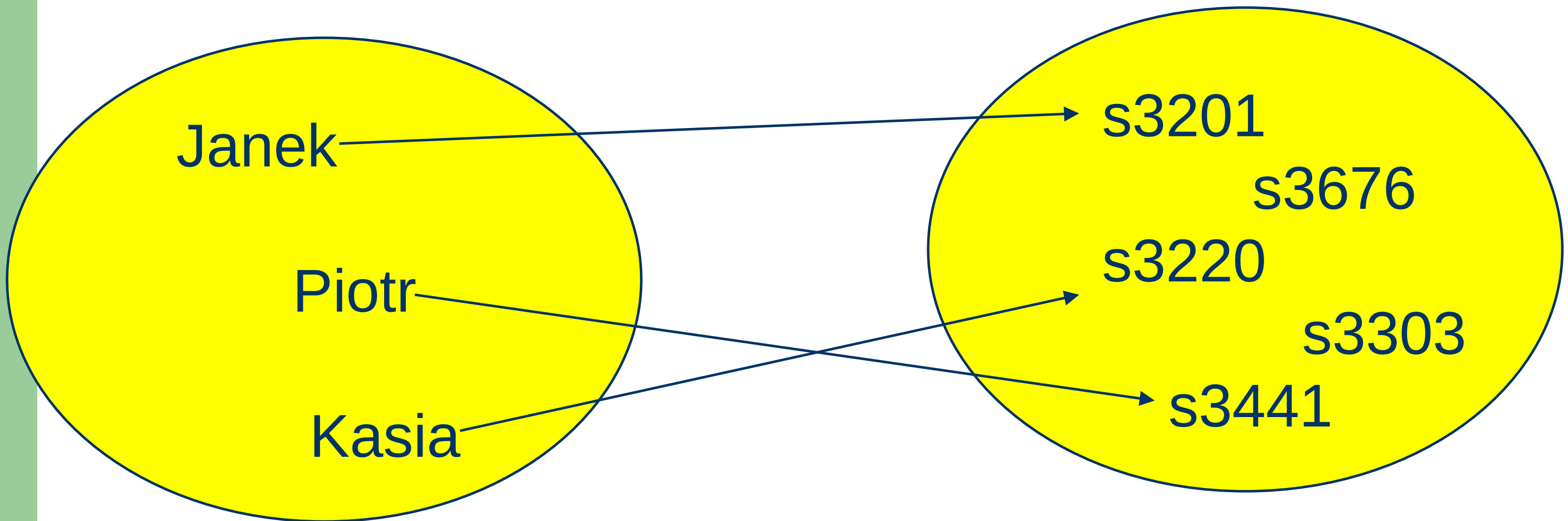


To jest bijekcja

Czy to jest iniekcja, suriekcja, bijekcja?

Niech A=zbiór studentów, B=zbiór numerów indeksów

f = {(a,b): b jest numerem indeksu studenta a}



To jest funkcja różnowartościowa, ale nie „na”

Czy to jest iniekcja, suriekcja, bijekcja?

Niech A=zbiór modeli samochodów,

B=zbiór marek samochodów

f = {(a,b): a jest modelem marki b}




Fiesta → Ford

Almera → Nissan

Ibiza → Seat

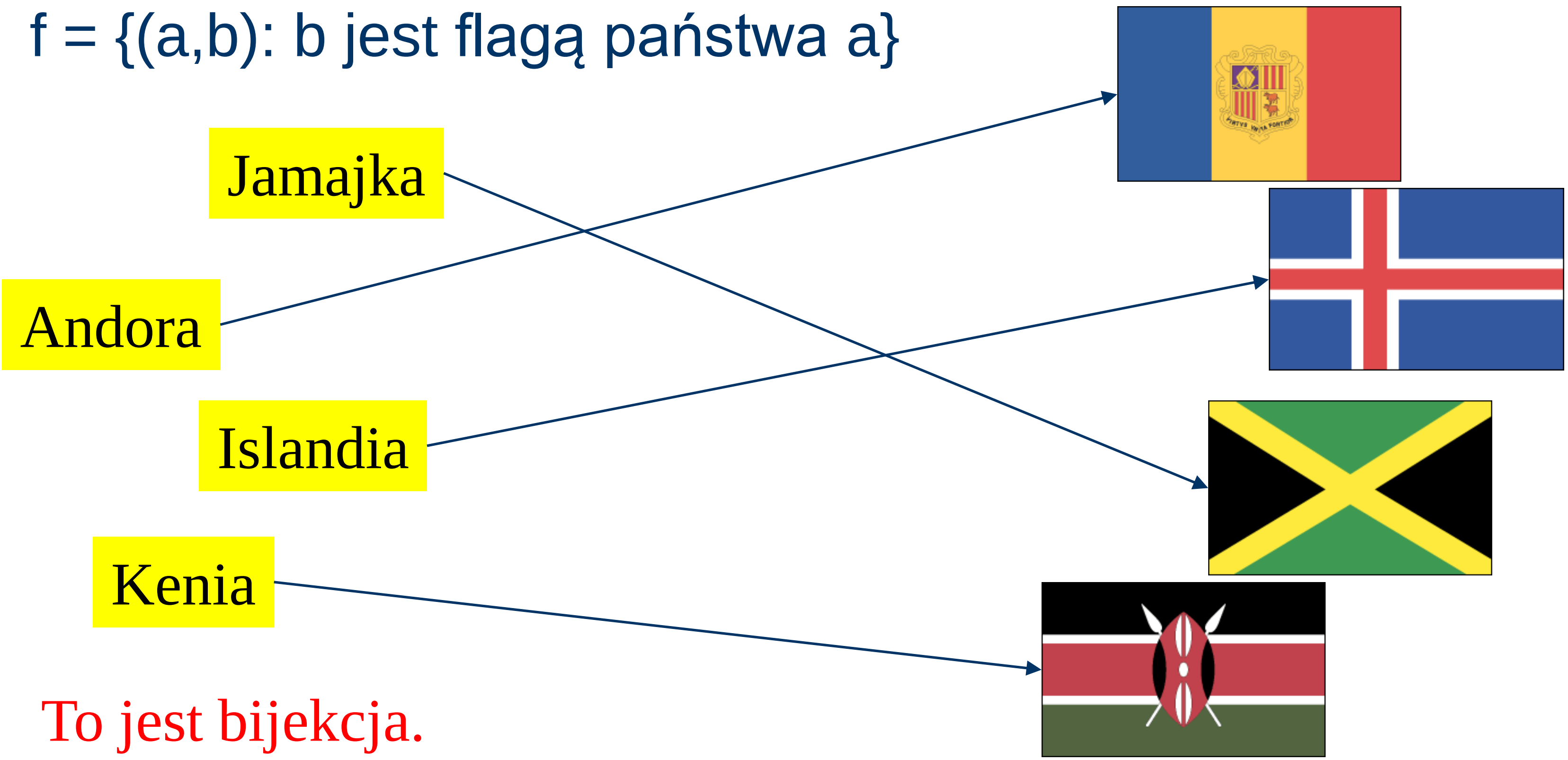
Patrol → Nissan

To jest funkcja „na”, ale nie różnowartościowa

Czy to jest iniekcja, suriekcja, bijekcja?

Niech A=zbiór państw, B=zbiór flag

f = {(a,b): b jest flagą państwa a}



To jest bijekcja.

Czy to jest funkcja różnowartościowa?

$$f: R \to R \qquad f(x) = 2^{3x-1}$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$2^{3x_1-1} = 2^{3x_2-1}$$

$$3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$$

$$3x_1 = 3x_2$$

$$x_1 = x_2$$

TAK

Czy to jest funkcja „na”?

$$f: R \to R \qquad f(x) = 2^{3x-1}$$

$$\mathrm{Im}(f) = R^{+}$$

Zatem jest to funkcja „na” zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,
ale nie jest to funkcja „na” zbiór liczb rzeczywistych

Czy to jest funkcja różnowartościowa?

$$f : R \to R \qquad f(x) = x^2 + 1$$

$$f(-1) = 2$$

$$f(1) = 2$$

$$-1 \neq 1 \quad \text{i} \quad f(-1) = f(1)$$

NIE – dla różnych argumentów mamy tę samą wartość

Jakie własności ma funkcja f?

Rozważmy program

$$P2(n) = \{x{:=}n \bmod 2;\ \mathrm{return}\ x\}$$

gdzie n jest liczbą naturalną i funkcję

$$f(n)=P2(n).$$

Czy f jest bijekcją w zbiorze liczb naturalnych?

Operacje na funkcjach

Złożenie funkcji

Jeżeli $f:X \to Y$ i $g:Y \to Z$, to

złożeniem funkcji

f i g nazywamy funkcję

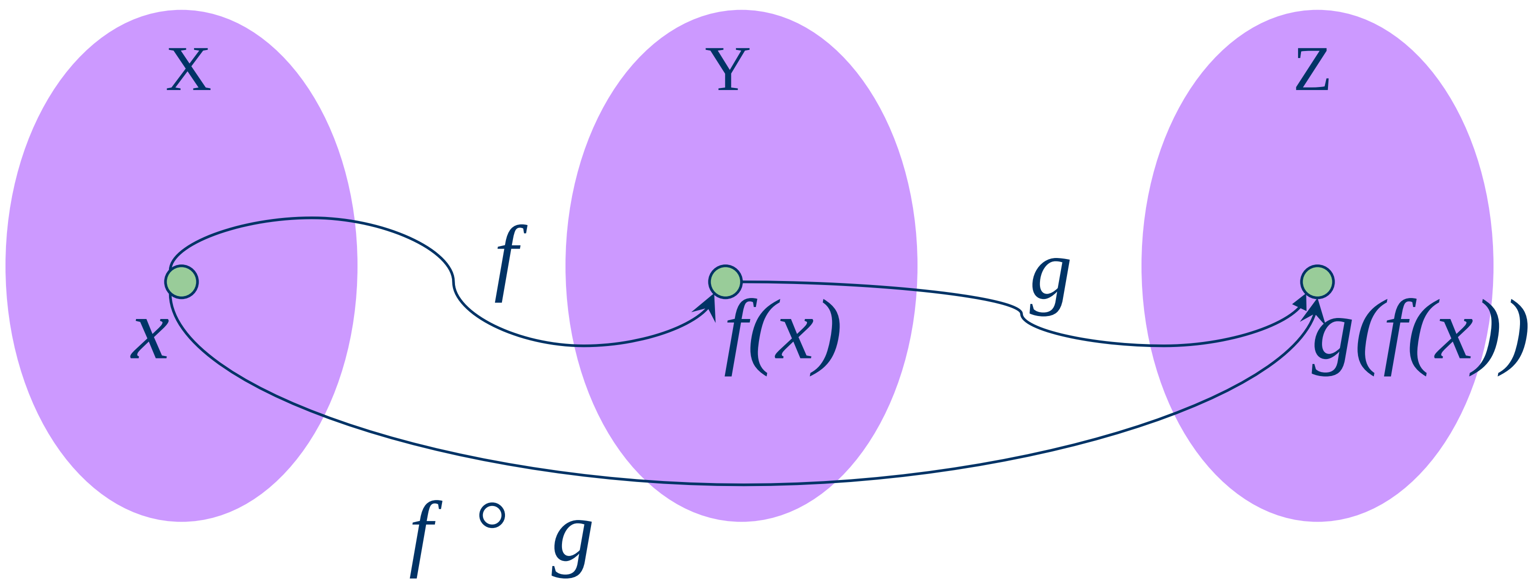
$$\mathbf{f \circ g : X \to Z,}$$

określoną wzorem

$$\mathbf{(f \circ g)(x) = g(f(x))}$$

dla wszystkich x takich, że $x \in \mathrm{Dom}(f)$ i $f(x) \in \mathrm{Dom}(g)$.

Złożenie funkcji



Złożenie funkcji

$$f(x) = \max\{4,\, x - 2\} \qquad g(x) = x^3$$

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = g(\max\{4,\, x - 2\}) =$$

$$= (\max\{4,\, x - 2\})^3$$

$$(g \circ f)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = \max\{4,\, x^3 - 2\}$$

Wyznacz $f \circ g$ i $g \circ f$.

Rozważmy programy

$P1(n) = \{x:=n \bmod 6; \text{return } x\}$

$P2(n) = \{x:=2^n; \text{return } x\}$

gdzie n jest liczbą naturalną i funkcje

$f(n)=P1(n)$ oraz $g(n)=P2(n)$.

Wyznacz $f \circ g$ i $g \circ f$. Czy $f \circ g = g \circ f$?

Lemat

1. Składanie funkcji nie jest operacją przemienną, tzn. istnieją funkcje f, g takie, że

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

2. Składanie funkcji jest operacją łączną, tzn. dla dowolnych funkcji f, g, h, jeżeli $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ i $h:Z\to V$, to

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Lemat

Niech $f:X \to Y$ i $g:Y \to Z$.

1. Jeżeli f i g są funkcjami różnowartościowymi, to $f \circ g$ jest funkcją różnowartościową.
2. Jeżeli funkcje f i g są odwzorowaniami odpowiednio "na" Y i "na" Z, to $(f \circ g)$ jest odwzorowaniem na zbiór Z.

Funkcja odwrotna

Funkcję $g:Y\to X$ nazywamy odwrotną do $f:X\to Y$, jeżeli

$$\mathbf{Dom(g)=Im(f)} \text{ i } \mathbf{Dom(f)=Im(g)}$$

oraz

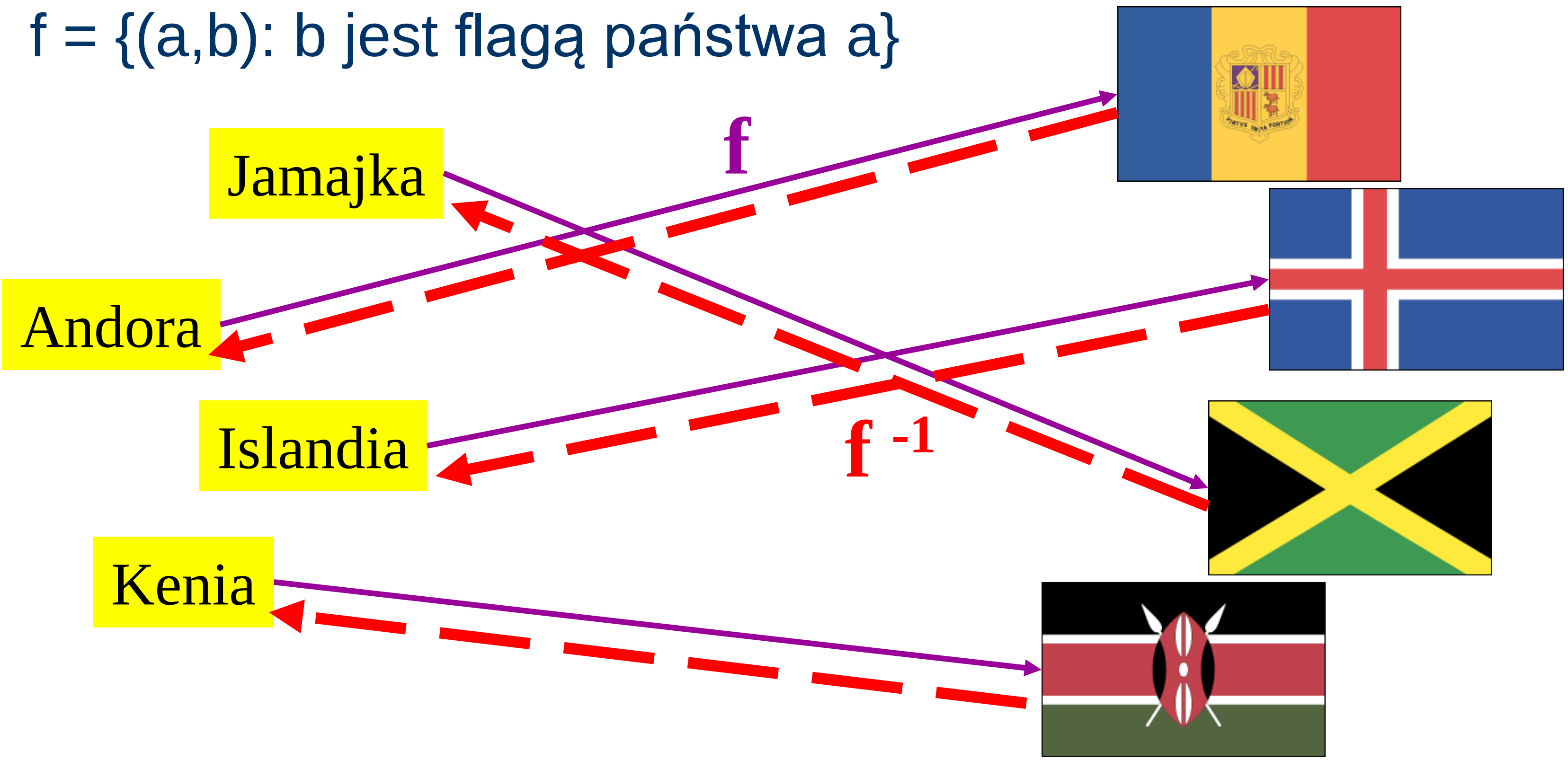
$$\mathbf{g(f(x))= x}$$

dla wszystkich $x\in Dom(f)$.

Funkcja odwrotna

Niech A=zbiór państw, B=zbiór flag

f = {(a,b): b jest flagą państwa a}



Funkcja odwrotna

$$f: R \setminus \{1\} \to R \setminus \{2\} \qquad f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$(1) \quad y = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$(2) \quad x = \frac{2y+1}{y-1}$$

$$(3) \quad (y-1)x = 2y+1$$

$$(4) \quad yx - 2y = 1 + x$$

$$(5) \quad y(x-2) = 1 + x$$

$$(6) \quad y = \frac{1+x}{x-2}$$

$$(7) \quad f^{-1}(x) = \frac{1+x}{x-2}$$

Czy można wyznaczyć funkcję odwrotną?

Rozważmy programy

$$P1(n) = \{x:=n \bmod 6;\ \text{return } x\}$$

$$P2(n) = \{x:=2^n;\ \text{return } x\}$$

gdzie n jest liczbą naturalną.

Czy można wyznaczyć f^{-1}, gdy

(a) $f(n)=P1(n)$,

(b) $f(n)=P2(n)$?

Lemat

Dla dowolnych funkcji $f:X\to Y$ i $g:Y\to Z$, jeżeli f i g są wzajemnie jednoznaczne (są bijekcjami), to istnieją funkcje

$$(f \circ g)^{-1}:Z\to X, \quad g^{-1}:Z\to Y, \quad f^{-1}:Y\to X$$

oraz zachodzi równość

$$(f \circ g)^{-1}=g^{-1} \circ f^{-1}.$$

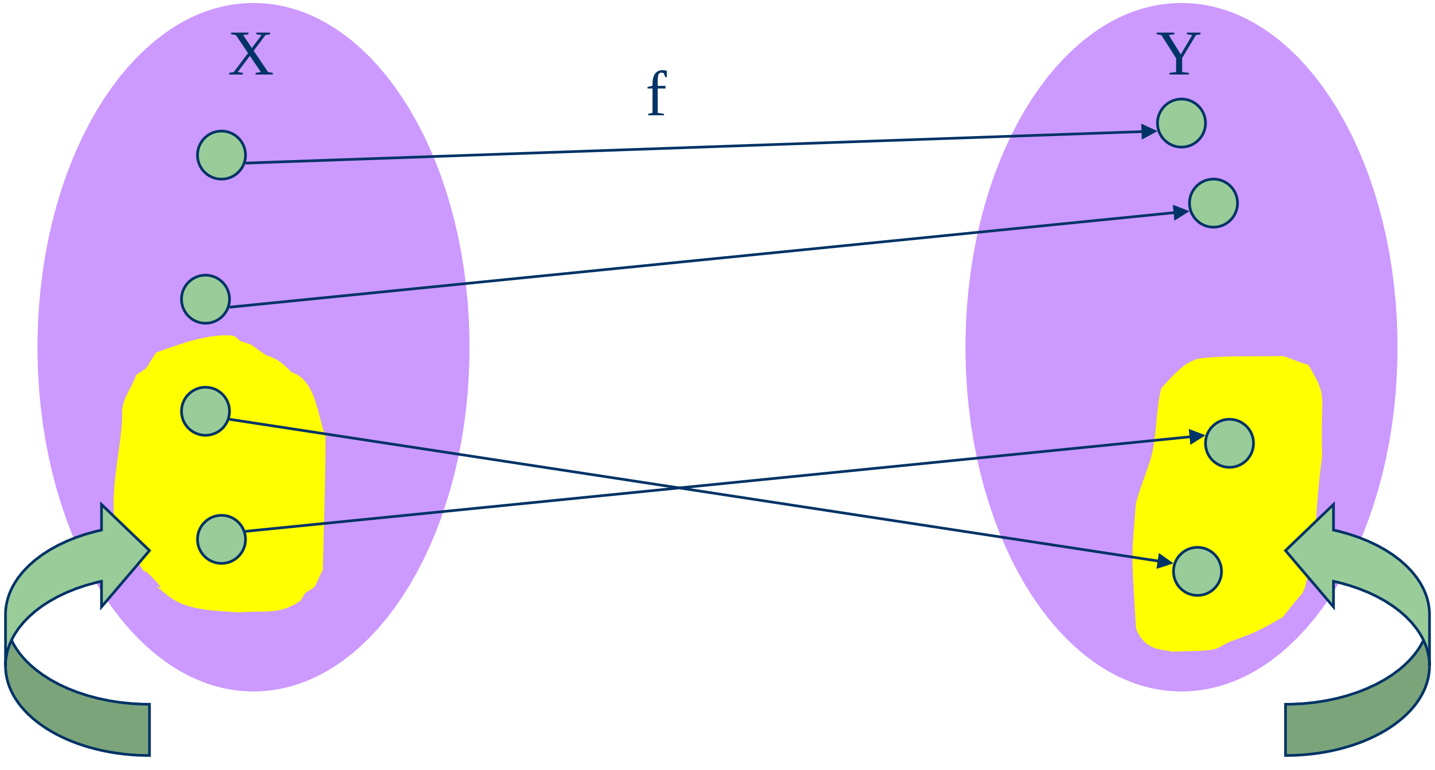
Obrazy i przeciwobrazy

Obraz

Obrazem zbioru $A \subseteq X$ wyznaczonym przez funkcję $f:X \to Y$ nazywamy zbiór $f(A)$ wartości jakie przyjmuje ta funkcja dla argumentów ze zbioru A,

$$f(A)=\{y : \text{istnieje } x \in A,\ f(x)=y\}.$$

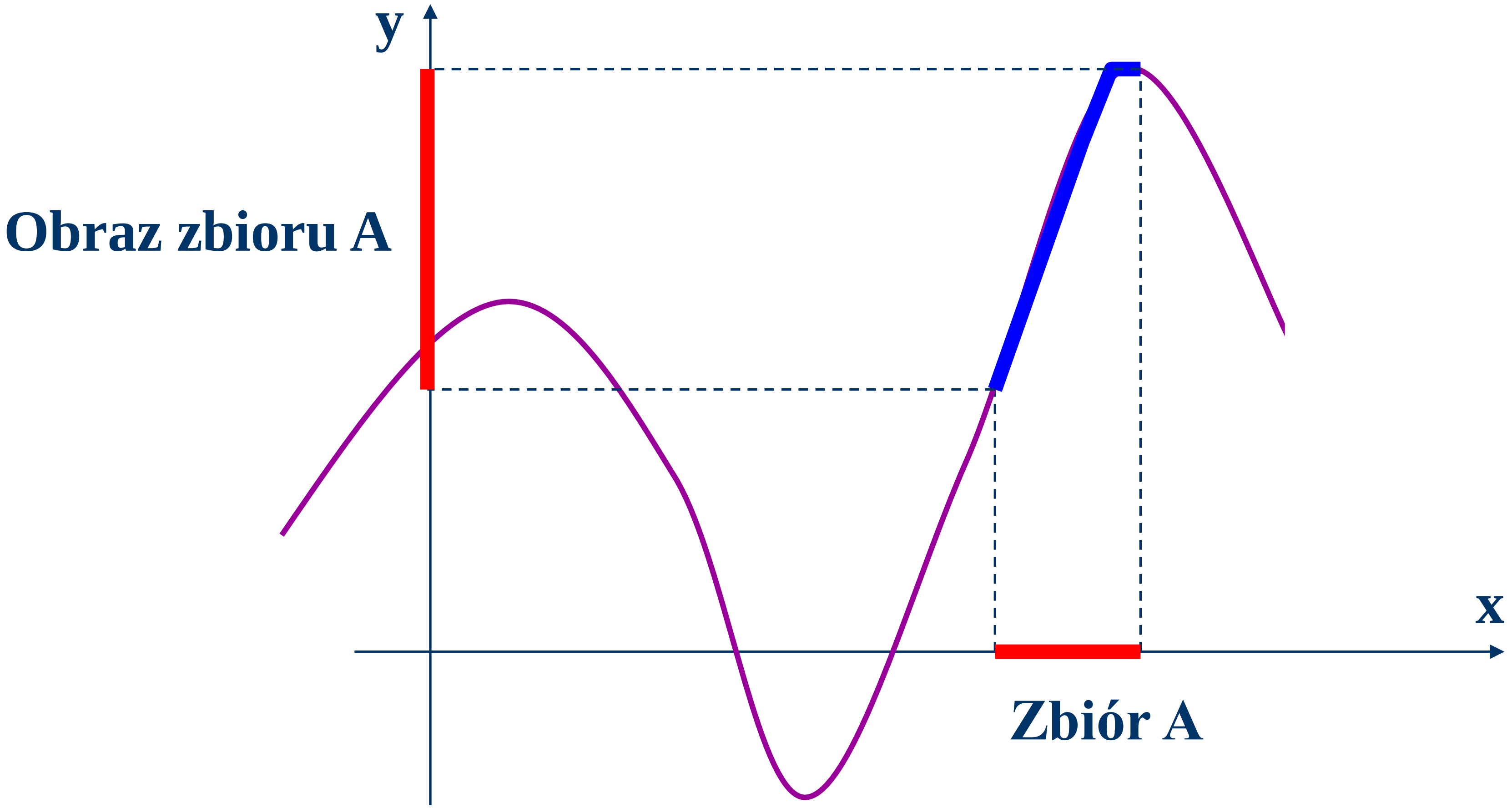
Obraz



Zbiór A

Obraz zbioru A

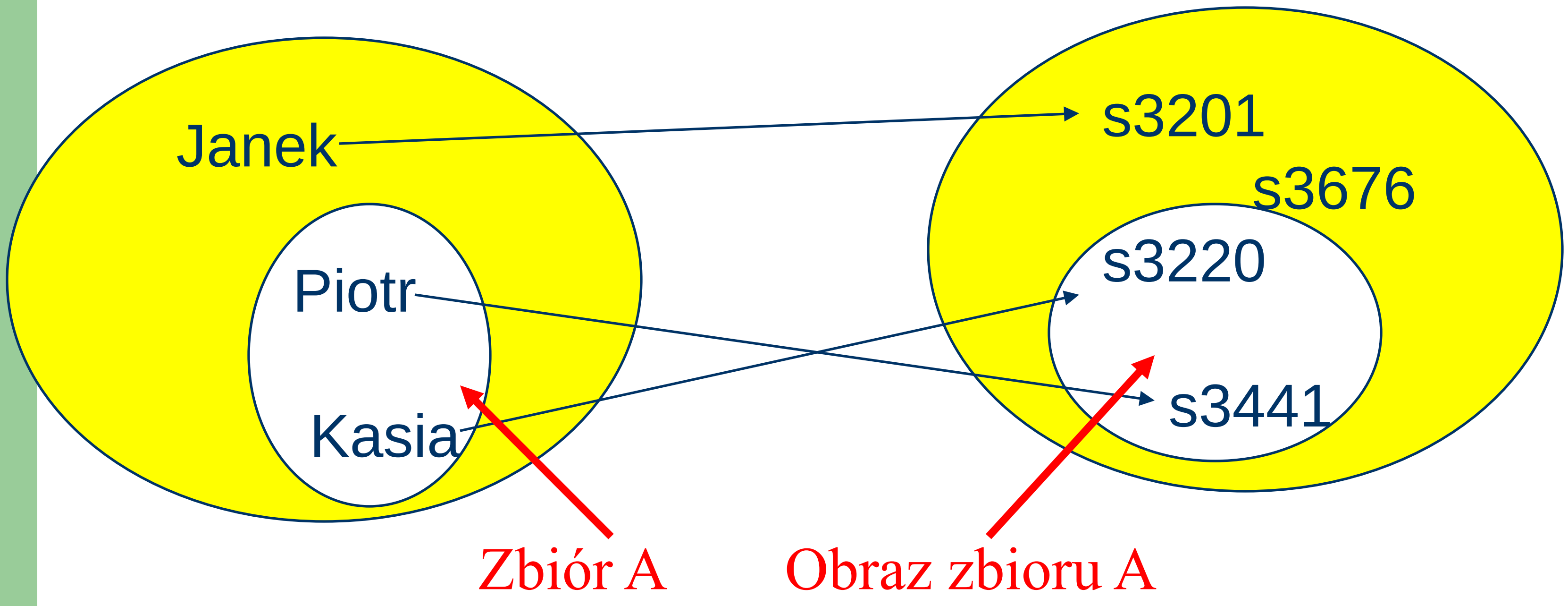
Obraz



Obraz

Niech A=zbiór studentów, B=zbiór numerów indeksów

f = {(a,b): b jest numerem indeksu studenta a}



Obraz

Wyznacz obraz zbioru A względem funkcji f.

$f(x) = \max\{3,x+1\}$ $A=\{2,3\}$

$f(2) = \max\{3,2+1\}=3,$ $f(3) = \max\{3,3+1\}=4$

$f(A) =\{3,4\}$

Wyznacz obraz zbioru A .

Rozważmy program

$$P1(n) = \{x:=n \bmod 6;\ \text{return } x\}$$

gdzie n jest liczbą naturalną i funkcję

$$f(n)=P1(n).$$

Wyznacz f(A) dla A={10,11,12}.

Lemat

Dla dowolnych zbiorów $A,B \subseteq X$ i dla dowolnej funkcji $f:X \to Y$,

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
2. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

Przeciwobraz

Przeciwobrazem zbioru $B \subseteq Y$

wyznaczonym przez funkcję f

nazywamy zbiór

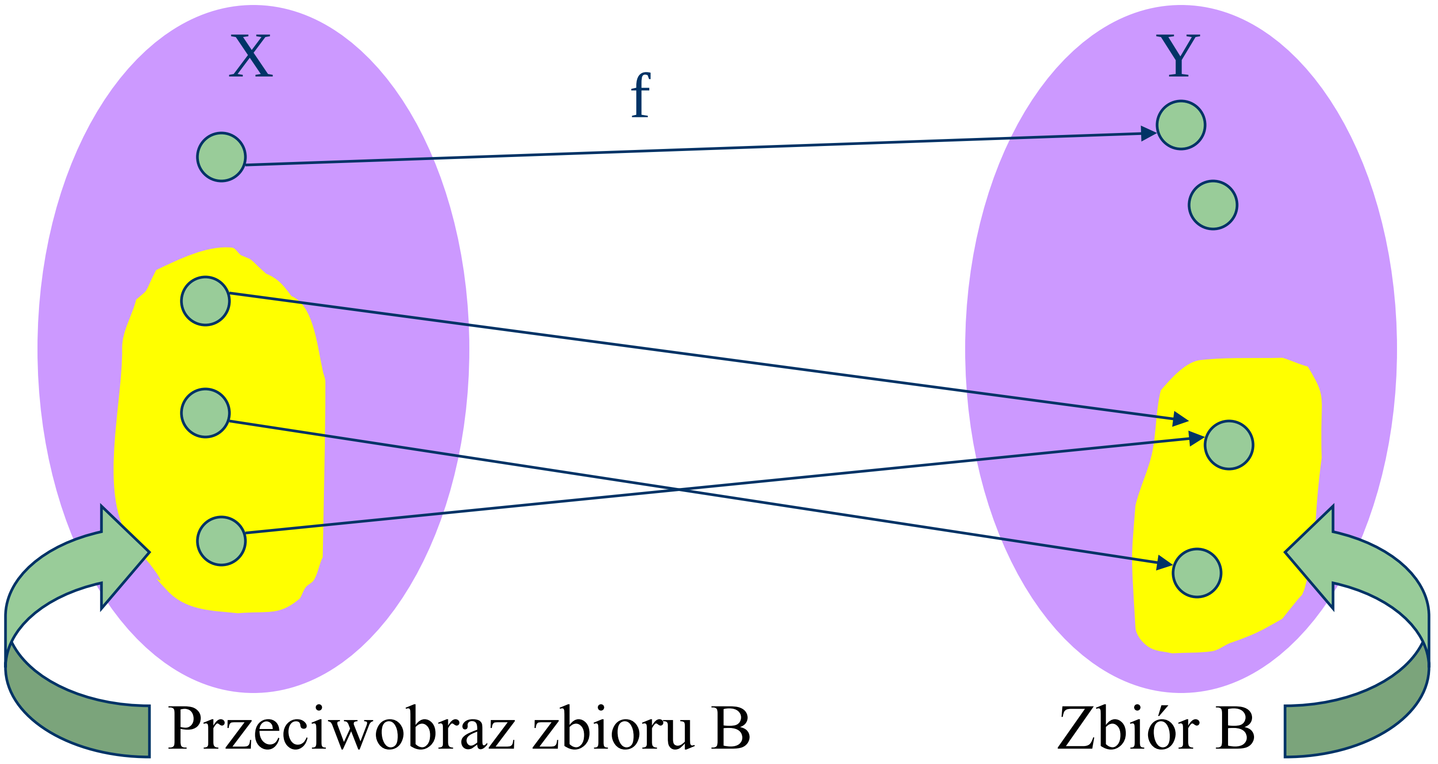
$$f^{-1}(B)$$

złożony z tych argumentów funkcji f,

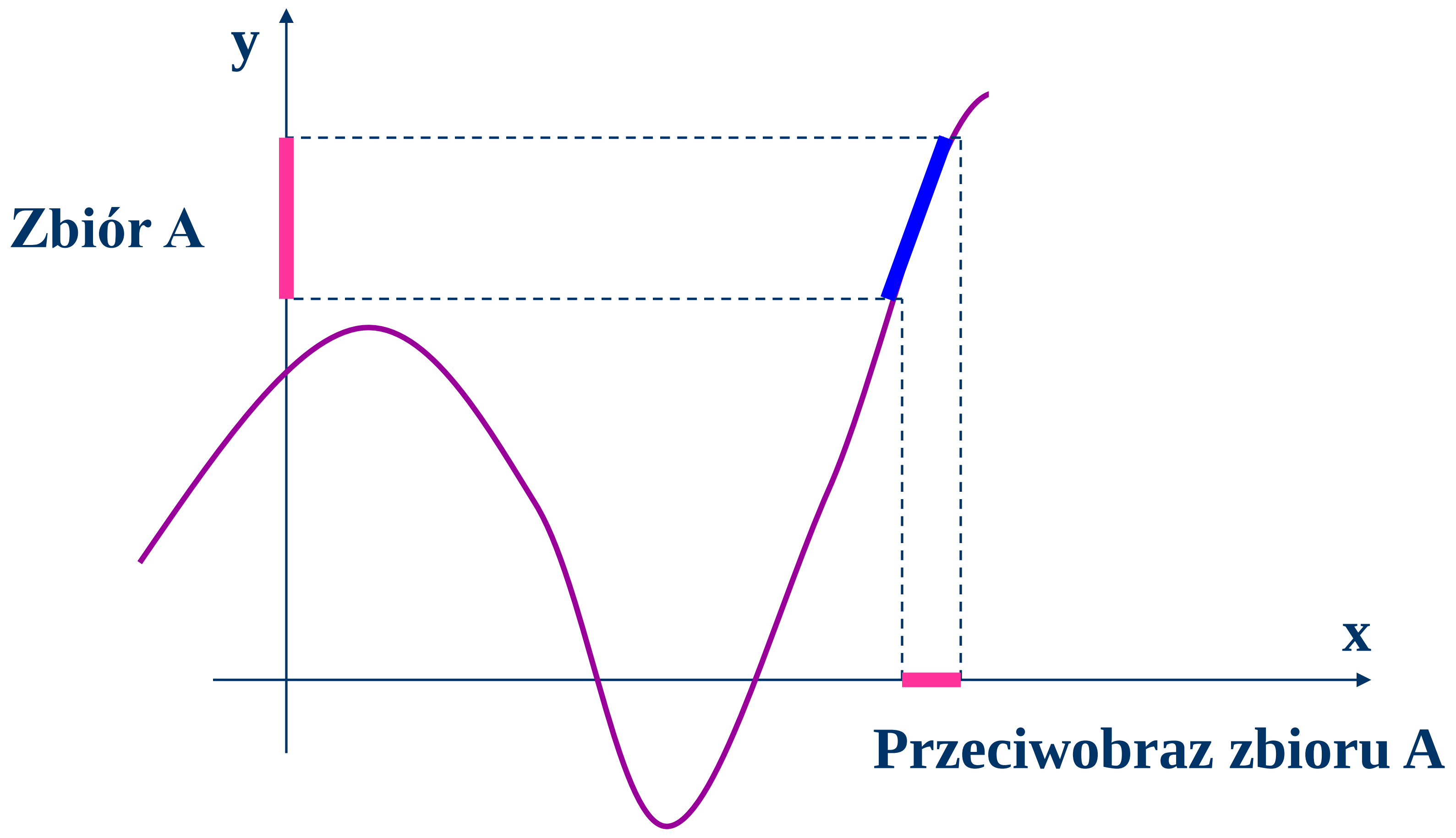
dla których wartości należą do B,

$$f^{-1}(B)=\{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Przeciwobraz



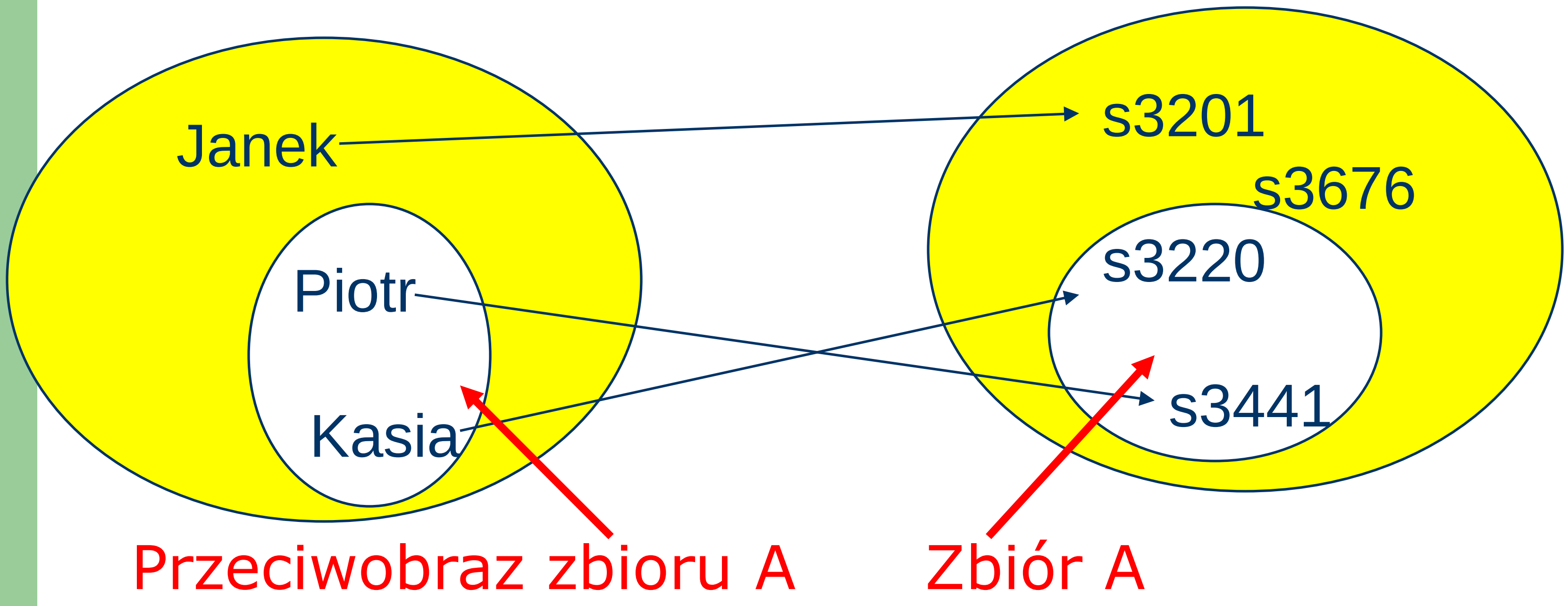
Przeciwobraz



Przeciwobraz

Niech A=zbiór studentów, B=zbiór numerów indeksów

f = {(a,b): b jest numerem indeksu studenta a}



Przeciwobraz

Wyznacz przeciwobraz zbioru A względem funkcji f.

$f(x) = \max\{3, x+1\}$ $A = \{2,3\}$

$f(x)=3$ jeśli $x \leq 2$ oraz $f(x)=x+1$ jeśli $x > 2$

$2 = \max\{3, x+1\} \Rightarrow x \in \emptyset$

$3 = \max\{3, x+1\} \Rightarrow x \leq 2$

$f^{-1}(A) = (-\infty, 2]$

Wyznacz przeciwobraz zbioru B.

Rozważmy program

P1(n) = {x:=n mod 6; return x}

gdzie n jest liczbą naturalną i funkcję

$f(n)=P1(n)$.

Wyznacz $f^{-1}(B)$, gdy $B=\{0,1\}$.

Lemat

Dla dowolnych zbiorów $A,B \subseteq Y$ i dowolnej funkcji $f: X \to Y$,

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Funkcje wieloargumentowe

Definicja

Jeżeli zbiór X jest produktem kartezjańskim zbiorów $X_1,\ldots,X_n$, to mówimy o **n-argumentowej funkcji**

$$f : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y$$

odwzorowującej produkt kartezjański $X_1 \times \ldots \times X_n$ w zbiór Y.

Przykład

$f : R \times R \times R \to R, \quad f(x,y,z) = \min\{x,y,z\}$

$f(3,4,-1)=\min\{3,4,-1\} = -1$

$f(0,2,2)=\min\{0,2,2\} = 0$

Notacja asymptotyczna

Definicja

Niech f i g będą funkcjami określonymi dla liczb naturalnych i o wartościach w R^+. Powiemy, że funkcja

$$\mathbf{f=\mathit{O}(g)}$$

wttw istnieją stała $c>0$ i liczba naturalna n_0 takie, że dla wszystkich liczb naturalnych $n > n_0$,

$$\mathbf{f(n) \leq c \cdot g(n).}$$

Definicja

Analogicznie, powiemy, że

$$\mathbf{f=\Omega(g)}$$

wttw istnieją stała $c>0$ i liczba naturalna n_0 takie, że dla wszystkich liczb naturalnych $n>n_0$,

$$\mathbf{c \cdot g(n) \leq f(n).}$$

Definicja

Jeśli równocześnie zachodzą oba warunki

$$\mathbf{f=\mathit{O}(g)\ i\ f=\Omega(g),}$$

to mówimy, że funkcja f ma ten sam rząd co funkcja g i oznaczamy krótko

$$\mathbf{f=\Theta(g).}$$

Przykład

	n=2	n=10	n=100
f(n)=log n	0,30	1	2
$f(n)=n^3$	8	1000	$1{,}00 \cdot 10^6$
$f(n)=2^n$	4	1024	$1{,}27 \cdot 10^{30}$

$n^3 = O(2^n)$, $n^3 = \Omega\,(\log n)$, $n^3 = \Theta(4n^3+1)$

Twierdzenie 1

Niech $f:N \to R^+$, $g:N \to R^+$ oraz

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) = c$$

gdzie c jest pewną stałą.

Wtedy jeśli c jest liczbą rzeczywistą oraz $c \neq 0$, to funkcje f i g mają ten sam rząd,

$f = \Theta(g)$.

Twierdzenie 1

W przeciwnym przypadku funkcje mają różne rzędy i

- jeśli $c=0$, to $\mathbf{f=\mathit{O}(g)}$,
- jeśli $c=+\infty$, to $\mathbf{f=\Omega(g)}$.

Przykład

Czy $30^n = O(2^n)$?

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{30^n}{2^n} = \lim_{n \to +\infty} (15^n) = +\infty$$

Nie, $30^n = \Omega(2^n)$

Przykład

Czy lg(n) = O(lg(n^n)) ?

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lg n}{\lg n^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\lg n}{n\lg n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

Tak, lg n=O(lg n^n)

Przykład

Czy $(3n+1)^5 = O(n^5)$?

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n+1)^5}{n^5}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+1}{n}\right)^5=\lim_{n\to+\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^5=$$

$$=\left[(3+0)^5\right]=3^5=243$$

Tak, $(3n+1)^5 = O(n^5)$. Ponadto $(3n+1)^5 = \Theta(n^5)$

Twierdzenie 2

Oto kilka pewnych znanych ciągów uporządkowanych w ten sposób, że każdy z nich jest ***O*** od wszystkich ciągów na prawo od niego:

$$1, \lg(n), \ldots, n^{1/4}, n^{1/3}, n^{1/2}, n, n \cdot \lg(n),$$
$$n^{3/2}, n^2, n^3, n^4, \ldots, 2^n, 3^n, \ldots, n!, n^n.$$

Przegląd funkcji elementarnych

Funkcja „modulo”

$$f(x) = x \bmod 2$$

inaczej

$$f(x) = \text{reszta z dzielenia } x \text{ przez } 2$$

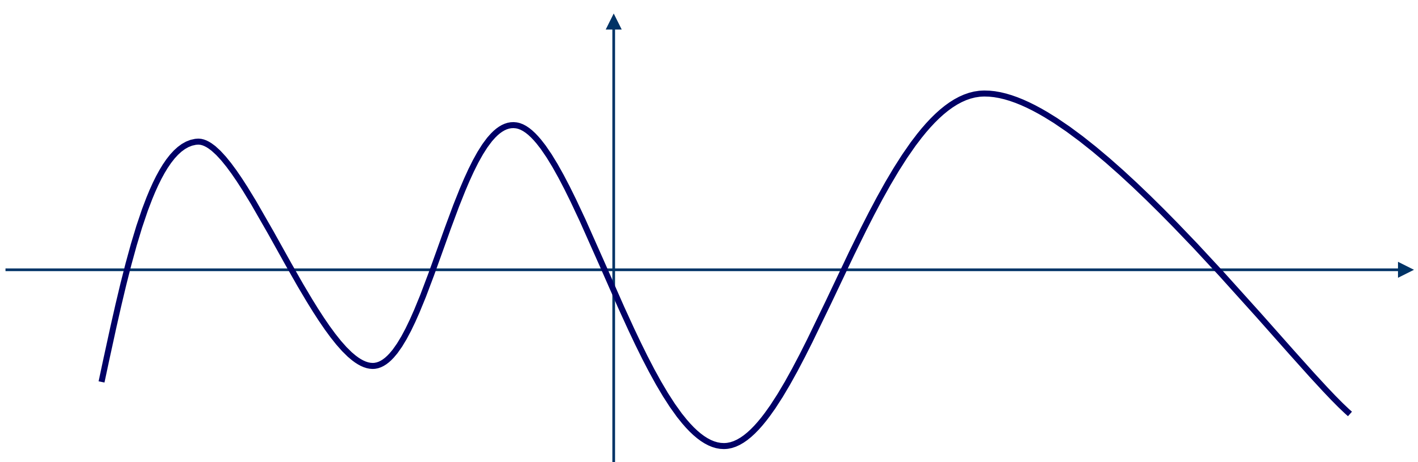
$f(4)=0$, $f(3)=1$, $f(6)=0$ itd.

Funkcje wielomianowe

Wielomianem stopnia n jednej zmiennej nazywamy funkcję postaci:

$$W(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

gdzie $x \in R$, $n \in N$, $a_0, a_1,...,a_n \in R$ oraz $a_n \neq 0$.



Funkcja liniowa

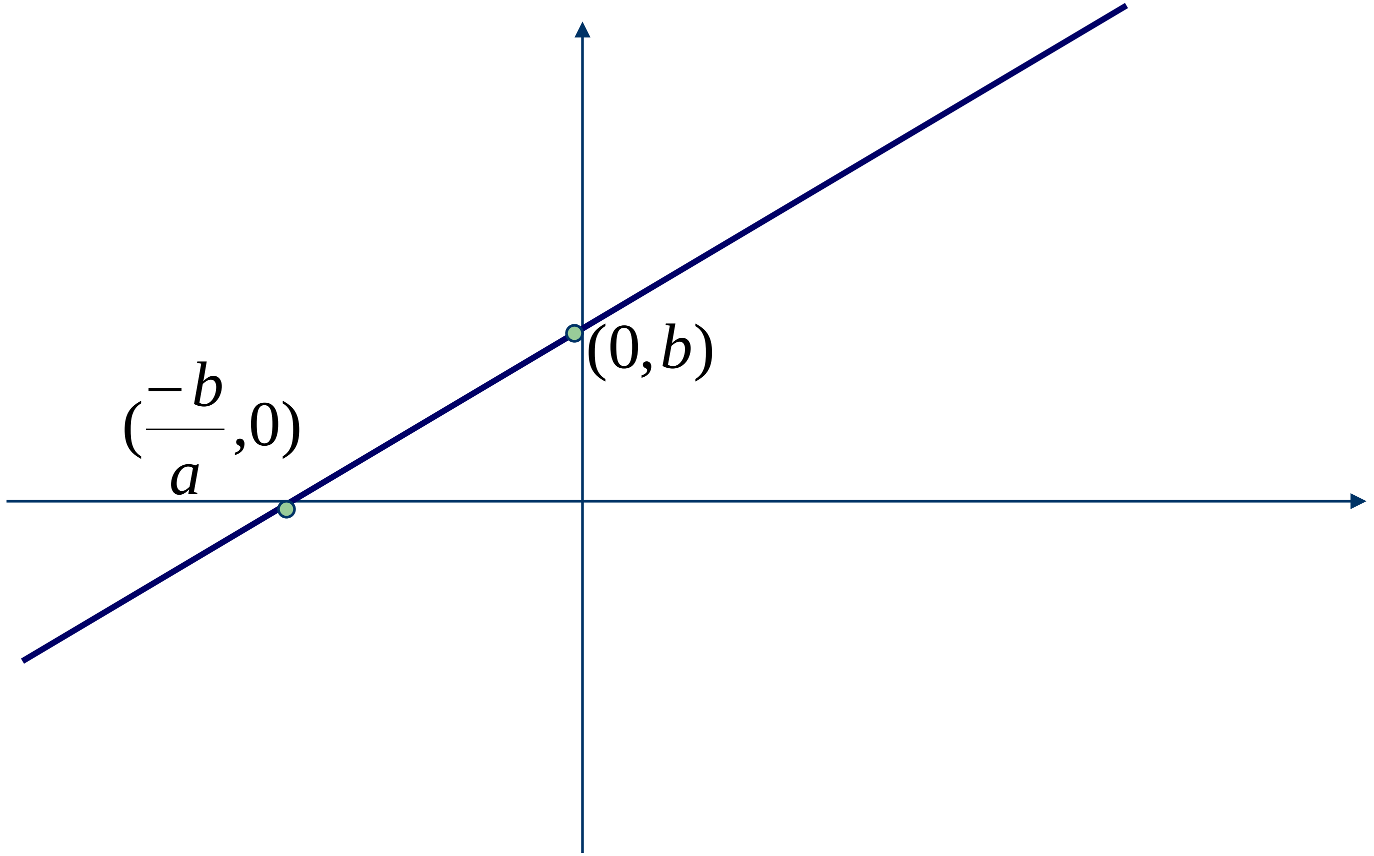
Funkcja liniowa

$$f(x)=ax+b$$

$a \neq 0$ jest wielomianem stopnia pierwszego.

Wykresem funkcji liniowej $y=ax+b$ jest linia prosta, przecinająca oś OY w punkcie $(0,b)$ i nachylona do osi OX pod kątem α takim, że $tg\alpha=a$.

Funkcja liniowa



y = ax+b

Funkcja kwadratowa

Funkcja kwadratowa

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

$a \neq 0$ jest wielomianem stopnia drugiego.

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku

$$w = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

gdzie $\Delta = b^2 - 4ac$

a jej osią symetrii jest prosta o równaniu $x = \frac{-b}{2a}$

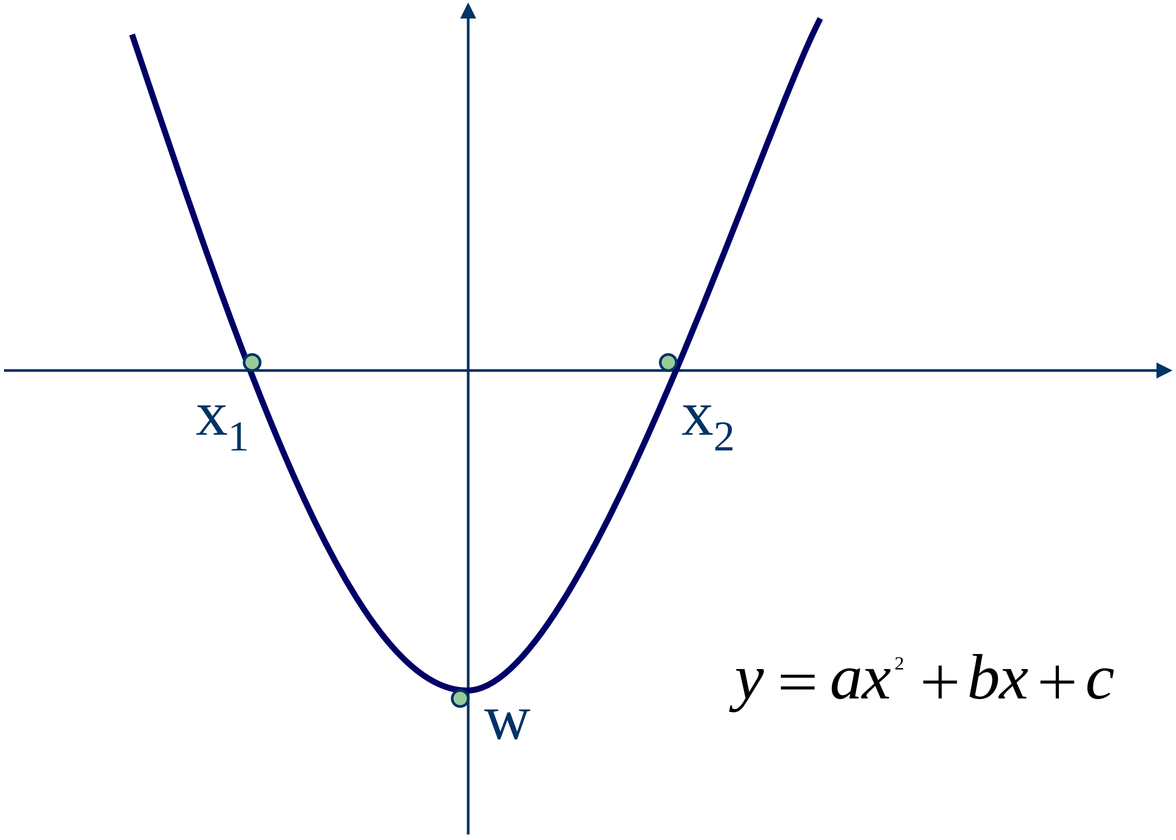
Funkcja kwadratowa

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$w = (\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$$



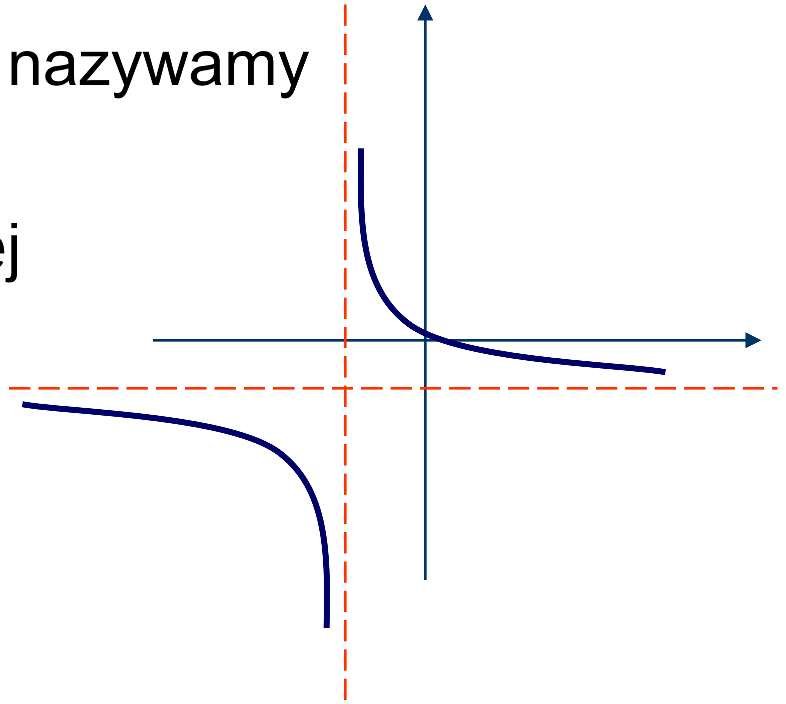
$$y = ax^2 + bx + c$$

Funkcja homograficzna

Funkcję postaci f(x) = $\dfrac{ax+b}{cx+d}$

gdzie a,b,c,d są danymi liczbami nazywamy **funkcją homograficzną**.

Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola mająca asymptotę pionową obustronną $x = \dfrac{-d}{c}$ i asymptotę poziomą obustronną $y = \dfrac{a}{c}$.

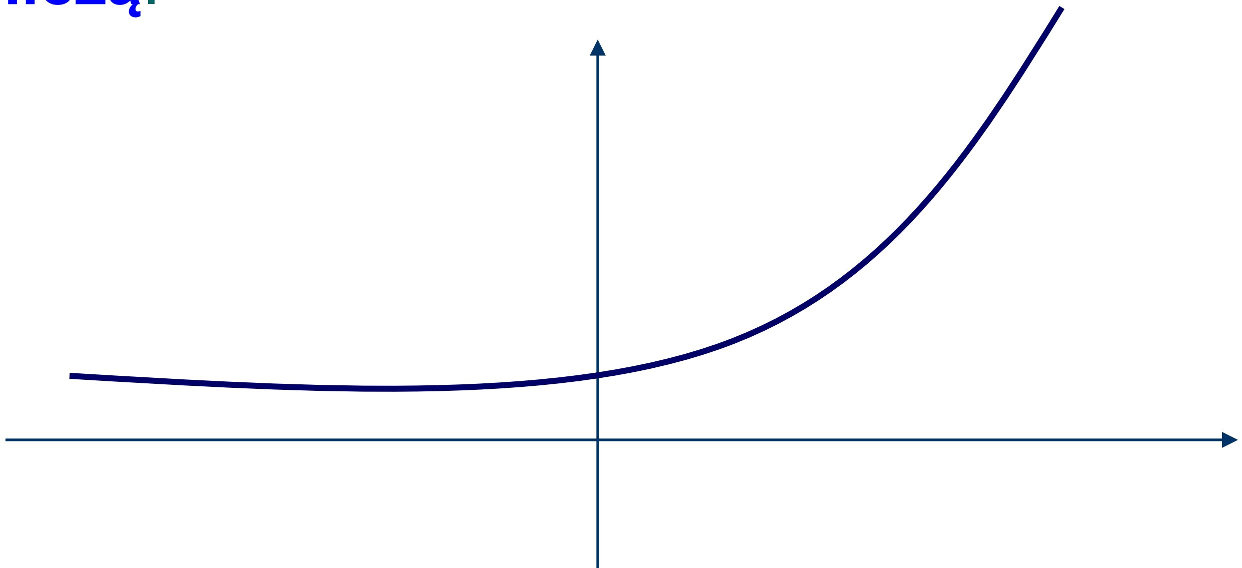


Funkcja wykładnicza

Funkcję postaci

$$\mathbf{f(x)=a^x}$$

$x \in R$, gdzie $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ nazywamy **funkcją wykładniczą**.

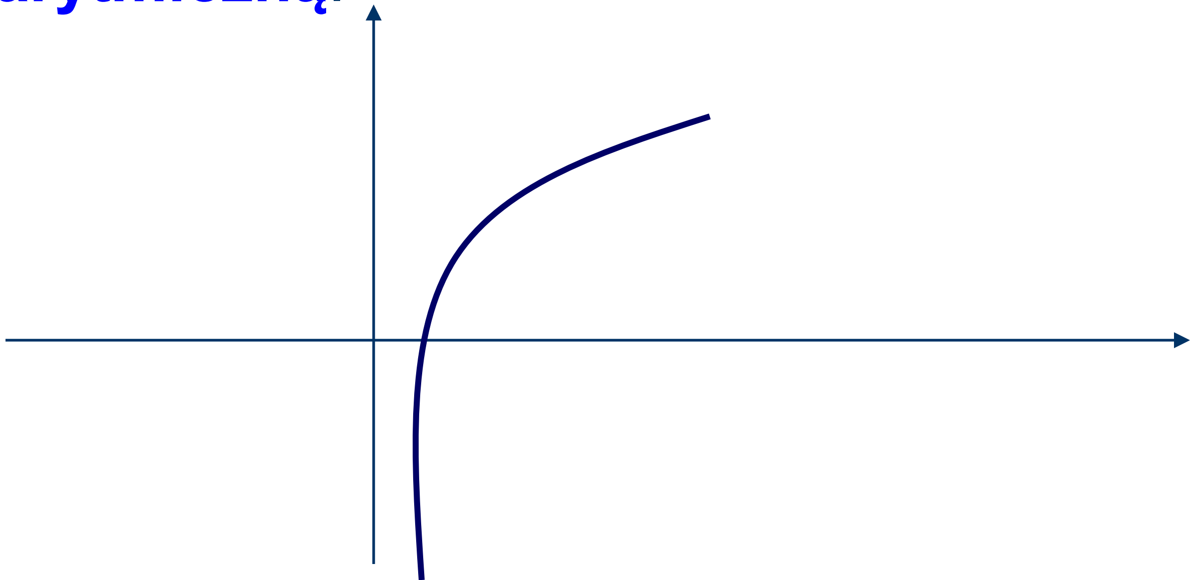


Funkcja logarytmiczna

Funkcję postaci

$$f(x) = \log_a x$$

gdzie $x \in R^+$, $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ nazywamy **funkcją logarytmiczną**.



Funkcja logarytmiczna

lg(x) – logarytm o podstawie 2

log(x) – logarytm o podstawie 10

ln(x) – logarytm o podstawie e

Liczba Nepera

Jest to liczba będąca granicą ciągu liczbowego nieskończonego

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e = 2,718281828 ....

e jest podstawą logarytmu naturalnego

ln x

oraz podstawą funkcji wykładniczej

$$\mathbf{e^x}$$