Relacje porządkujące

1. Sprawdź, czy relacja r jest relacją porządku w zbiorze X. Jeśli tak wskaż elementy wyróżnione.

   (a) $X = \mathbb{Z}$, $x\ r\ y$ wttw, gdy $|x| \leqslant |y|$,

   (b) $X = \mathbb{R}$, $x\ r\ y$ wttw, gdy $x^5 \geqslant y^5$,

   (c) $X = \{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$, $x\ r\ y$ wttw, gdy $x \leqslant y$,

   (d) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x_1, y_1)\ r\ (x_2, y_2)$ wttw, gdy $x_1 \leqslant x_2$,

   (e) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(x_1, y_1)\ r\ (x_2, y_2)$ wttw, gdy $x_1 < x_2$ lub $(x_1 = x_2$ i $y_1 \leqslant y_2)$,

   (f) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(x_1, y_1)\ r\ (x_2, y_2)$ wttw, gdy $x_1 + y_1 \leqslant x_2 + y_2$.

2. Sprawdź, czy zbiór X jest (a) liniowo, (b) dobrze uporządkowany przez relację r, gdy:

   (a) $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ oraz $r = \{(x, y) : x \leqslant y\}$,

   (b) $X = (1, 10)$ oraz $r = \{(x, y) : x \leqslant y\}$,

   (c) $X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ oraz $r = \{(x, y) : x|y\}$,

   (d) $X = P(\{1, 2, 3, \ldots, 10\})$ oraz $r = \{(A, B) : A \subseteq B\}$.

3. Narysuj diagram Hassego zbioru częściowo uporządkowanego $(P(U), \subseteq)$, gdzie $U = \{1, 10, 11\}$. Wskaż elementy wyróżnione. Wyznacz $supA$ i $infA$, gdzie $A = \{X : X \in P(\{1, 10\})\}$. Czy w zbiorze $P(U)\backslash\{\emptyset, U\}$ (zbiór złożony z podzbiorów właściwych zbioru U) istnieje element najmniejszy i największy?

4. Niech $(A, |)$ będzie zbiorem uporządkowanym. Wskaż elementy wyróżnione, gdy:

   (a) $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$,

   (b) $A = \{2, 3, \ldots, 100\}$,

   (c) $A = \{5^x : x \in \mathbb{N}\} \cup \{3, 4, 6, 9\}$,

   (d) $A = \mathbb{N}^+$,

   (e) $A = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$,

   (f) $A = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

5. Podaj, o ile to możliwe, przykład zbioru częściowo uporządkowanego w postaci diagramu Hassego, który ma:

   (a) tylko jeden element maksymalny i nie ma elementu największego,

   (b) ma tylko dwa elementy minimalne i nie ma elementu największego.

6. Niech Σ będzie pewnym alfabetem, gdzie $|\Sigma| > 0$. Dla $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ niech $w_1\ \ r\ \ w_2$ wttw, gdy długość(w_1) $\leqslant$długość(w_2). Czy r jest częściowym porządkiem w zbiorze Σ^*? Odpowiedź uzasadnij.

7. Niech F będzie zbiorem wszystkich funkcji określonych na odcinku $[0, 1]$ o wartościach w $\mathbb{R}^+$. Definiujemy relację r w zbiorze F taką, że $f\ r\ g$ wttw, gdy dla każdego x należącego do dziedziny zachodzi $f(x) \leqslant g(x)$. Udowodnij, że r jest częściowym porządkiem w F. Wskaż elementy wyróżnione.

8. Niech $p(n)$ będzie liczbą różnych dzielników pierwszych liczby naturalnej n. W zbiorze $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ określamy relację r taką, że $x\ r\ y$ wttw, gdy albo $p(x) < p(y)$ albo $p(x) = p(y)$ i $x \leqslant y$.

   (a) Udowodnij, że zbiór $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}, r)$ jest liniowo uporządkowany. Wskaż elementy wyróżnione.

   (b) Zbadaj, czy relacja r jest dobrym porządkiem w zbiorze $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$.

9. Czy dla danego $X \neq \emptyset$ można określić relację r tak, by była ona relacją równoważności i jednocześnie zbiór (X, r) był częściowo uporządkowany?

10. Czy każdy zbiór liniowo uporządkowany jest kratą?

11. Niech $P(t)$, gdzie $t \in \mathbb{N}$ będzie następującym programem

$P(t) = \{x := 1;\ \ A := \emptyset;$

$\quad\quad$ $while\ \ x \leqslant t^2\ \ do$

$\quad\quad\quad$ $if\ \ x \geqslant t\ \ then\ \ A := A \cup \{x\};\ \ fi$

$\quad\quad\quad$ $x := x + 1;$

$\quad\quad$ od

$\quad\quad$ $return\ \ A\}.$

Rozważmy zbiór $P = \{P(t) : t \in \mathbb{N}\}$ z relacją zawierania zbiorów $\subseteq$. Czy $(P, \subseteq)$ jest częściowym porządkiem? Jeśli tak wyznacz elementy wyróżnione i sporządź diagram tego porządku.

12. Niech $P(t)$, gdzie $t \in \mathbb{Z}$ będzie następującym programem

$P(t) = \{k := 0;\ \ x := -3;\ \ A := \emptyset;$

$\quad\quad$ $if\ \ t = 0\ \ OR\ \ t = 2\ \ then\ \ k := 0\ \ else$

$\quad\quad\quad$ $if\ \ t = 1\ \ OR\ \ t = 3\ \ then\ \ k := -1\ \ else$

$\quad\quad\quad\quad$ $if\ \ t = 4\ \ OR\ \ t = 6\ \ then\ \ k := -2\ \ else\ \ k := -3\ \ fi$

$\quad\quad\quad$ fi

$\quad\quad$ fi

$\quad\quad$ $while\ \ x < 8\ \ do$

$\quad\quad\quad$ $if\ \ x < t + 2\ \ AND\ \ x > k - 1\ \ then\ \ A := A \cup \{x\};\ \ x := x + 1\ \ else\ \ x := x + 1\ \ fi$

$\quad\quad$ od

$\quad\quad$ $return\ \ A\}.$

Rozważmy zbiór $P = \{P(0), P(1), P(2), \ldots, P(6)\}$ z relacją zawierania zbiorów $\subseteq$. Czy $(A, \subseteq)$ jest częściowym porządkiem? Jeśli tak wyznacz elementy wyróżnione i sporządź diagram tego porządku.

13. Zbiór częściowo uporządkowany (X, r) nazywa się **drzewem** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego x, zbiór $O_r(x) = \{y : (y, x) \in r\}$ jest dobrze uporządkowany przez relację r ograniczoną do elementów tego zbioru oraz zbiór (X, r) posiada element najmniejszy. Rozważmy zbiór Σ^* będący zbiorem wszystkich słów (łącznie ze słowem pustym) nad alfabetem $\Sigma = \{a, b\}$ oraz relację r określoną w zbiorze Σ^* taką, że $(w, w') \in r$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje słowo w'' takie, że $w' = ww''$. Czy (Σ^*, r) jest drzewem?

14. Niech U będzie zbiorem wszystkich możliwych stanów gry "Kółko i krzyżyk". Powiemy, że stan gry S_i jest w relacji r ze stanem gry S_j wtedy i tylko wtedy, gdy planszę stanu S_j można otrzymać z planszy stanu S_i przez dodanie dowolnej (także zerowej) ilości symboli zarówno "kółko" jak i "krzyżyk". Sprawdź, czy relacja r jest relacją porządku w zbiorze U. Jeśli tak, to:

    (a) ustal, czy relacja r jest relacją porządku liniowego,

    (b) narysuj wybrany fragment diagramu Hassego relacji r,

    (c) wyznacz elementy wyróżnione względem relacji r,

    (d) podaj przykład 3-elementowego zbioru $A \subseteq U$ takiego, że A posiada kres górny i kres dolny w zbiorze U względem relacji r,

    (e) podaj przykład 3-elementowego zbioru $B \subseteq U$ takiego, że B nie posiada kresu górnego w zbiorze U względem relacji r.

15. Niech uniwersum relacji r będzie zbiór $\mathbb{N}$. Powiemy, że liczba naturalna p jest w relacji r z liczbą naturalną q wtedy i tylko wtedy, gdy liczba p jest osiągalna na zmiennej i poprzez wykonanie algorytmu Alg dla argumentu q. Sprawdź, czy relacja r jest relacją porządku w zbiorze U, gdy:

    (a) $Alg(n) = \{i := n;\ \ while\ \ i > 0\ \ do\ \ if\ \ i \bmod 2 = 0\ \ then\ \ i := i/2;\ \ else\ \ i := i - 1;\ \ fi\ \ od\}$,

    (b) $Alg(n) = \{i := n;\ \ while\ \ i > 0\ \ do\ \ if\ \ random(\{0,1\}) = 0\ \ then\ \ i := i \operatorname{div} 2;\ \ else\ \ i := 2i - 1;\ \ fi\ \ od\}$,

    (c) $Alg(n) = \{i := n;\ \ while\ \ i > 0\ \ do\ \ if\ \ i \bmod 2 = 0\ \ then\ \ i := i/2;\ \ else\ \ i := 2i - 1;\ \ fi\ \ od\}$,

(d) $Alg(n) = \{i := n;\ \ while\ \ i > 0\ \ do\ \ if\ \ i \bmod 2 = 0\ \ then\ \ i := i/2;\ \ else\ \ i := 3i{+}1;\ \ fi\ \ od\}$.

Jeśli tak, to:

- ustal, czy relacja r jest relacją porządku liniowego,
- narysuj wybrany fragment diagramu Hassego relacji r,
- wyznacz elementy wyróżnione względem relacji r,
- podaj przykład k-elementowego zbioru $A \subseteq U$, gdzie $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, takiego, że A posiada kres górny i kres dolny w zbiorze U względem relacji r,
- podaj przykład k-elementowego zbioru $B \subseteq U$, gdzie $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, takiego, że B nie posiada kresu górnego w zbiorze U względem relacji r.

16. Zbiór częściowo uporządkowany (X, r) nazywa się **drzewem rzędu** n, dla $n \in \mathbb{N}_+$, wtedy i tylko wtedy, gdy jest drzewem (zobacz zadanie 13) oraz dowolny element $x \in X$ posiada dokładnie n elementów będących jego bezpośrednimi następnikami w zbiorze X względem relacji r. Rozważmy zbiór U będący zbiorem wszystkich wykonań pewnego jednoargumentowego algorytmu rekurencyjnego $Alg\,(n)$, dla $n \in \mathbb{N}$. Powiemy, że wykonanie algorytmu $Alg\,(i)$ jest w relacji r z wykonaniem algorytmu $Alg\,(j)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wykonanie $Alg\,(i)$ jest rekurencyjnie osiągalne z wykonania $Alg\,(j)$. Podaj taki przykład algorytmu Alg, dla którego relacja r jest relacją porządku w zbiorze U taką, że:

(a) zbiór (U, r) jest drzewem rzędu 1,

(b) jeżeli rodzina $\{U_1, U_2\}$ jest podziałem zbioru U, to zbiory (U_1, r), (U_2, r) są drzewami rzędu 1,

(c) jeżeli rodzina $\{U_1, U_2, \ldots U_k\}$ jest podziałem zbioru U, to zbiór (U_i, r) jest drzewem rzędu 1, dla dowolnych $k \in \mathbb{N}_+$ i $1 \leqslant i \leqslant k$,

(d) zbiór (U, r) jest drzewem rzędu 2,

(e) zbiór (U, r) jest drzewem rzędu k, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_+$,

(f) jeżeli rodzina $\{U_1, U_2, \ldots U_k\}$ jest podziałem zbioru U, to zbiór (U_i, r) jest drzewem rzędu i, dla dowolnych $k \in \mathbb{N}_+$ i $1 \leqslant i \leqslant k$.