Elementy Modelowania Matematycznego

Wykład 12

Teoria gier II

Spis treści

- Wstęp
- Oligopol, cła oraz zbrodnia i kara
- Strategie mieszane
- Analiza zachowań w warunkach dynamicznych
- Indukcja wsteczna
- Gry powtarzane

Wstęp

- Pojęcie równowagi Nasha często występuje w rozważaniach dotyczących teorii gier.
- Omówimy kilka gier, gdzie równowaga Nasha jest istotnym elementem rozważań.

Oligopol

- Duopol Cournota

Augustin Cournot (1838, *Studia nad matematycznymi podstawami teorii dobrobytu*) – model zależności między dwiema konkurującymi ze sobą firmami:

- firmy 1 i 2 produkują ten sam towar – konsumentom wszystko jedno od kogo kupują
- q_i – wielkość produkcji firmy i, $q_1, q_2 \geq 0$, czyli całkowita produkcja $q_1 + q_2$ (w tysiącach)
- cena p zależy od liczby sztuk wyprodukowanego towaru, np. $p = 1000 - q_1 - q_2$; koszt produkcji 100\$/1000 sztuk towaru
- cel: zmaksymalizować zysk

Oligopol

- Duopol Cournota

Wyznaczamy postać normalną gry.

- zysk (u_i) = (produkcja $\times$ cena jednostkowa) - koszty

$$u_1(q_1, q_2) = (1000 - q_1 - q_2)q_1 - 100q_1,$$
$$u_2(q_1, q_2) = (1000 - q_1 - q_2)q_2 - 100q_2$$

- maximum tych funkcji, np. u_1:
  $1000 - 2q_1 - q_2 - 100 = 0 \hookrightarrow q_1 = 450 - q_2/2$
- czyli (gra jest symetryczna) powinni produkować
  $q_1 = q_2 = 300$ – ten profil strategii jest równowagą Nasha

Oligopol

- Z punktu widzenia przedsiębiorstw, równowaga Nasha gry Cournota nie jest efektywna.
- Pod tym względem gra Cournota jest podobna do dylematu więźnia.
- Zobaczymy to, jeśli zauważymy że firmy zrobią lepiej produkując po 225 000 sztuk towaru każda – wtedy maksymalizują łączny zysk, gdyż własne koszty i korzyści przedsiębiorstwa przy wzrastającej produkcji różnią się od łącznych kosztów i korzyści.

Oligopol

- Duopol Bertranda
- Model Cournota jest nierealistyczny, bo firmy wybierają wielkość produkcji, ale nie wybierają ceny.
- Model Josepha Bertranda (1883, Matematyczna teoria dobrobytu społecznego): załóżmy, że firmy niezależnie od siebie ustalają ceny i patrzą jaki jest popyt.

Oligopol

- Niech relacja cena - produkcja jak poprzednio

$$Q = 1000 - p, \text{ gdzie } Q = q_1 + q_2$$

- czyli przy cenie p popyt wyniesie 1000 - p.
- Klienci kupują gdzie taniej, więc jeśli u konkurenta będzie taniej, to firma nie sprzeda ani jednej sztuki towaru.

p_i – ceny ustalone przez firmy

$u_i(p_1, p_2)$ – wypłaty dla firmy i

Oligopol

$$u_i(p_1, p_2) = (1000 - p_i)p_i - 100(1000 - p_i) = (1000 - p_i)(p_i - 100)$$

czyli

$$u_i(p_1, p_2) = \begin{cases} (1000 - p_i)(p_i - 100) & \text{gdy } p_i < p_j \\ 0 & \text{gdy } p_i > p_j \end{cases}$$

Oligopol

- W grze Bertranda firmy w równowadze osiągają zysk zero, a u Couranta zyski są dodatnie.
- U Bertranda ceny są niższe, a wielkości produkcji wyższe.
- U Couranta by zwiększyć sprzedaż trzeba zwiększyć produkcję a duże przyrosty produkcji powodują duże spadki cen, co źle wpływa na zysk.
- Tak więc, w przypadku rynków z jednorodnymi towarami, manipulacje cenowe są lepsze od manipulacji ilościowych.

Polityka celna

- Rządy mogą wprowadzać bariery ograniczające handel międzynarodowy.
- Korzyść przy niewielkich cłach, ale przy założeniu że inni ceł nie podniosą.
  - wzrost cen na banany w UE (bo cło),- spadek globalnego popytu i spadek cen
  - gdy różnica duża - dochody z ceł mogą być większe niż spadek dobrobytu obywateli UE

Polityka celna

- Inny kraj może stosować podobną politykę, np. USA na sery z UE.
- W rezultacie oba kraje stracą.
- Obie strony skorzystają, gdy uda się utrzymać politykę wolnego handlu.
- Sytuacja podobna jak w dylemacie więźnia.

Zwalczanie przestępczości

- Gary Becker (Noblista): . . . optymalny zakres podejmowanych środków przymusu zależy m.in., od kosztów zatrzymania przestępców, osądzenia ich, rodzaju kary (grzywna, więzienie), reakcji więźniów na zmiany stosowanych środków.

- **Wniosek**: nawet przy optymalnej polityce ścigania przestępstw, będą one w dalszym ciągu popełniane.

Zwalczanie przestępczości

- władze (W) mają poziom wydatków na ściganie $x \geq 0$
- przestępca (P) wybiera poziom nielegalnej aktywności $y \geq 0$

Wypłata władz

$$u_W = -c\,x - y^2/x$$

$-y^2/x$ – negatywny efekt społeczny działalności przestępczej, c - umowny jednostkowy koszt działania policji

Wypłata przestępcy

$$u_P = y^{1/2}/(1 + x\,y)$$

$y^{1/2}$ – korzyść z działalności przestępczej, gdy nie schwytany;
$1/(1 + x\,y)$ – prawdopodobieństwo schwytania

Strategie mieszane

- Strategia mieszana - wybór strategii zgodnie z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa - ocena przez gracza jego własnych zachowań.
- Zbiór strategii mieszanych zawiera wszystkie strategie czyste.
- Funkcja wypłaty - wartość oczekiwana.

Strategie mieszane

- Niektóre gry nie mają równowagi Nasha.
- Orzeł i reszka: gracze jednocześnie i niezależnie od siebie wybierają 'orła' albo 'reszkę', pokazując monetę na swojej ręce.
- Jeżeli ich wybór jest zgodny, to gracz 2 musi oddać swoją monetę graczowi 1;
- w przeciwnym wypadku gracz 1 oddaje swoją monetę graczowi 2.

Strategie mieszane

- Tu żaden profil nie jest stabilny, zawsze jest wygrany i przegrany,
- ale sytuacja się zmienia, gdy któryś z nich zmieni strategię.
- Wybór dwu strategii z prawdopodobieństwem 1/2 wygląda na wycofanie się z gry, ale naprawdę jest składnikiem równowagi Nasha w strategiach mieszanych

Strategie mieszane

- Lobbing
- Aby strategia mieszana była najlepszą odpowiedzią, musi ona przypisywać dodatnie prawdopodobieństwo tylko tym strategiom czystym, które są najlepszymi odpowiedziami.

Strategie mieszane

- Lobbing

Przykład – lobbing

Dwie firmy niezależnie podejmują decyzje – lobbować (L), wtedy koszt = 15, czy nie lobbować (N). Gdy obie lobbują, albo obie nie lobbują to osiągną zysk = 10.

1. Y - lobbuje, X - nie, Y ma korzyść= 30, X ma korzyść= 0, więc wypłata Y= $30 - 15$
2. X - lobbuje, Y - nie, X ma korzyść= 40, Y ma korzyść= 0, więc wypłata X= $40 - 15$

Strategie mieszane

- Postać normalna gry w Lobbing

X \ Y	L	N
L	–5, –5	25, 0
N	0, 15	10, 10

- Gra ma dwie równowagi w strategiach czystych: (N,L) oraz (L,N).

Strategie mieszane

q – prawdopodobieństwo wyboru przez firmę Y strategii L, czyli strategia mieszana Y to $(q, 1-q)$
Wtedy firma X, jeśli wybierze strategię L, ma wypłatę
$-5\,q + 25\,(1-q) = 25 - 30\,q$
a jeśli wybierze strategię N, to $0\,q + 10\,(1-q) = 10 - 10\,q$
Dla firmy X, jeśli wybierze strategię mieszaną, to musi być

$$25 - 30q = 10 - 10q$$

czyli $q = 3/4$, czyli najlepszą odpowiedzią firmy X będzie strategia mieszana, jeżeli strategią firmy Y jest $(3/4, 1/4)$.

Analiza zachowań w warunkach dynamicznych

- Postulaty drzewa gry
- **Postulat 1**: Każdy wierzchołek następuje po wierzchołku początkowym. Tylko wierzchołek początkowy nie ma powyższej właściwości.
- **Postulat 2**: Każdy wierzchołek, oprócz początkowego, ma dokładnie jednego bezpośredniego poprzednika. Wierzchołek początkowy nie ma poprzedników.

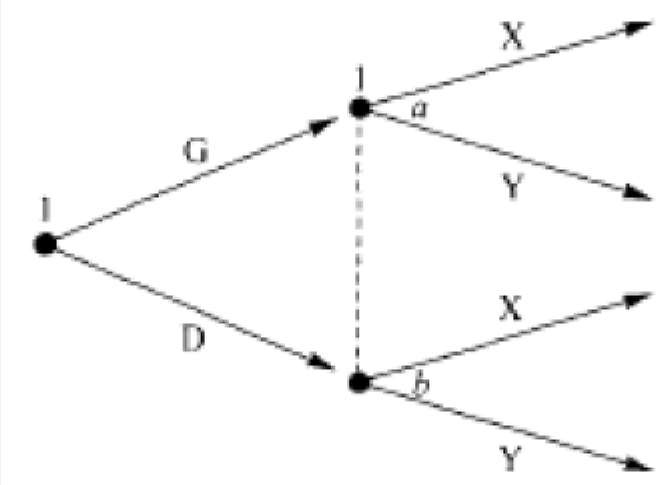
Analiza zachowań w warunkach dynamicznych

- **Postulat 3**: Krawędzie wychodzące z tego samego wierzchołka mają różne nazwy.
- **Postulat 4**: Każdy zbiór informacyjny zawiera wierzchołki decyzyjne tylko jednego gracza.
- **Postulat 5**: Wszystkie wierzchołki w danym zbiorze informacyjnym mają identyczną liczbę bezpośrednich następników i ten sam zbiór nazw krawędzi (odpowiadających akcjom gracza) prowadzących do ich następników.

Analiza zachowań w warunkach dynamicznych

- Zakładamy, że gracze mają pamięć doskonałą, czyli pamiętają wszystkie swoje posunięcia.
- Podobno teoretycy studiujący pamięć niedoskonałą, zapomnieli gdzie zostawili notatki

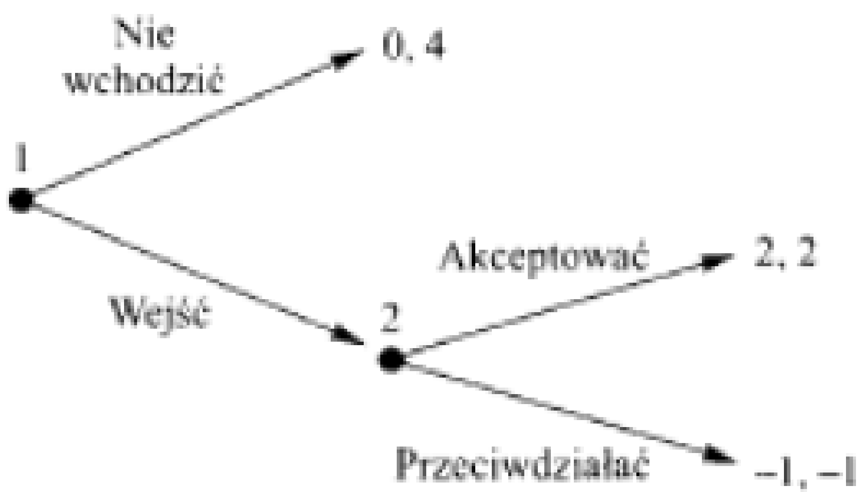
Analiza zachowań w warunkach dynamicznych



- Gdy graf ma linię przerywaną, to mamy grę z niepełną informacją. (pamięć niedoskonała)

Indukcja wsteczna

- Wejście na rynek i wojna cenowa



1 \ 2	A	P
W	2, 2	−1, −1
N	0, 4	0, 4

Indukcja wsteczna

- Mamy dwie firmy: G1 - konkurent, G2 - firma działająca od dawna.
- Gracz G1 - wejść, czy nie wejść na rynek?
- Jeżeli stara firma zaakceptuje działalność konkurenta, to obie firmy osiągną umiarkowane zyski.
- Z rys. wynika, że są dwie równowagi w strategiach czystych:
- (W,A) i (N,P)
- Założenie - gracze podejmują decyzje o strategii przed rozpoczęciem gry i zapisują ją.

Indukcja wsteczna

- Czy równowaga (N,P) jest prawdopodobna?
- Raczej nie, bo rzadko zapisuje się strategie, nie uwzględniając upływu czasu.
- W rzeczywistości groźba wywołania wojny cenowej jest niewiarygodna.

Gry powtarzane

T – liczba etapów gry
$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ – zbiór wszystkich profili akcji graczy
$u_i(a)$ – wypłata gracza i przy wyborze profilu a

Zawsze rozgrywana jest ta sama gra i uczestnicy pamiętają historię gry. Wypłata w całej grze, jest sumą wypłat w grach etapowych.

Np. na rys. 6: jeżeli w pierwszym okresie dojdzie do wyniku (A,X), a w drugim do (B,Y), to

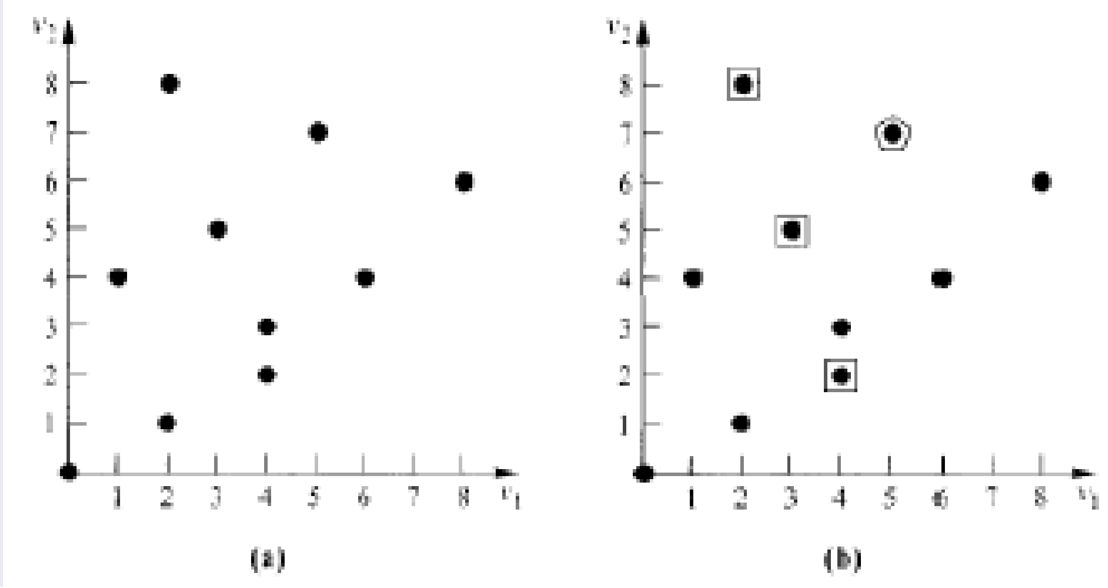
- wypłata gracza 1: $4 + 2 = 6$
- wypłata gracza 2: $3 + 1 = 4$

Gry powtarzane

- Jednokrotnie powtórzona gra etapowa (T = 2)

1 \ 2	X	Y	Z
A	4, 3	0, 0	1, 4
B	0, 0	2, 1	0, 0

Gry powtarzane



- Możliwe wypłaty w grze powtarzanej

Gry powtarzane

- Na rys. każdy punkt odpowiada sumie dwóch wektorów wypłata w grach etapowych.
- Np. wektor wypłat (3,5) oznacza, że w pierwszym okresie nastąpi wynik (A,Z), a w drugim (B,Y), lub na odwrót.
- Te gry mają bardzo dużo strategii.

Koniec