klasyczna definicja prawdopodobieństwa

prawdopodobieństwo warunkowe

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B

## **niezależność zdarzeń**

więc

co oznacza, że zdarzenie b nie ma wpływu na prawdopodobieństwo zdarzenia a

permutacje

Korzystamy z permutacji, jeżeli dokonujemy operacji na wszystkich elementach zbioru np.: na ile sposobów można ustawić 3 książki na półce. Odpowiedź: 3! = 1\*2\*3 = 6.

gdzie *n* określa liczebność zbioru

kombinacje

Korzystamy z kombinacji, jeżeli ze zbioru mamy wybrać kilka elementów i ich kolejność nie jest istotna np.: na ile różnych sposobów możemy wybrać 3 osoby spośród 7. Odpowiedź:

gdzie *n* określa liczebność zbioru, a *k* określa liczbę losowanych elementów

wariacje bez powtórzeń

Korzystamy z wariacji bez powtórzeń, jeżeli ze zbioru mamy wybrać kilka niepowtarzalnych elementów i ich kolejność jest istotna np.: ile różnych liczb czterocyfrowych można ułożyć z dziewięciu ponumerowanych od 1 do 9 drewnianych klocków? Odpowiedź:

gdzie *n* określa liczebność zbioru, a *k* określa liczbę losowanych elementów

wariacje z powtórzeniami

Korzystamy z wariacji z powtórzeniami, jeżeli ze zbioru mamy wybrać kilka elementów, które mogą się powtarzać i ich kolejność jest istotna np.: ile różnych liczb czterocyfrowych można ułożyć z liczb od 1 do 9? Odpowiedź:

gdzie *n* określa liczebność zbioru, a *k* określa liczbę losowanych elementów

schemat bernoulliego

Korzystamy ze schematu bernoulliego w przypadku, gdy przeprowadzamy wiele prób danego doświadczenia (np.: rzut monetą) i chcemy obliczyć prawdopodobieństwo osiągnięcia sukcesów w próbach np.: rzucamy 3 razy monetą – jakie jest prawdopodobieństwo, że reszka wypadnie dokładnie 2 razy:

- liczba prób

– oczekiwana liczba sukcesów

- prawdopodobieństwo sukcesu

- prawdopodobieństwo porażki (1-)

zadania

1. Z okazji zjazdu koleżeńskiego spotyka się 10 osób. Ile nastąpi powitań (uścisków dłoni)?

odp.: szukamy wszystkich możliwych par, a więc kombinacja 2 z 10

1. Przy pomocy indukcji matematycznej udowodnij

ODP.: Dla liczba permutacji wynosi 1, a . Zakładamy, że , więc

1. DO windy w 8-piętrowym budynku wsiadło 5 osób. Na ile różnych sposobów mogą oni opuścić windę na różnych piętrach?

odp.:

1. W przedziale wagonu kolejowego ustawione są naprzeciw siebie dwie ławki. Każda z ławek posiada 5 ponumerowanych miejsc. Do wagonu wsiada 5 osób, z których 3 zajmują miejsca na jednej z ławek, a 2 pozostałe osoby usiadły na drugiej ławce, naprzeciw 2 osób z pierwszej ławki. ile jest możliwych układów ludzi na ławkach?

odp.: 1 osoba ma 5 możliwości, 2 osoba ma 4 możliwości, 3 osoba ma 3 możliwości, 4 osoba ma 3 możliwości, 5 osoba ma 2 możliwości, czyli . Dodatkowo pierwsza osoba może wybrać jedną z dwóch ławek więc ostatecznie

1. Każdej z 4 osób przyporządkowujemy dzień tygodnia, w którym się urodziła. Ile jest możliwych wyników takiego przyporządkowania, jeżeli:
   1. każda z osób mogła się urodzić w dowolnym dniu

odp.: Wariacja z powtórzeniami

* 1. każda z osób urodziła się w innym dniu tygodnia

odp.: Wariacja bez powtórzeń

1. Z cyfr: 2, 3, 4, 5, 7 układamy liczby 5-cio cyfrowe o różnych cyfrach. Ile można ułożyć takich liczb, które:
   1. są podzielne przez 3

odp.: liczba jest podzielna przez 3 gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 3, więc 5!

* 1. są podzielne przez 9

odp.: liczba jest podzielna przez 9 gdy suma jej cyfr jest podzielna przez 9, więc 0

* 1. są podzielne przez 4

odp.: liczba jest podzielna przez 4 gdy jej ostatnie dwie cyfry są podzielne przez 4, więc xxx32, xxx24, xxx72, xxx52 więc

1. Liczby 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ustawiamy losowo w ciąg, który potraktujmy jako liczbę 7-cyfrową (której pierwszą cyfrą nie może być 0). Ile jest możliwych takich ustawień, w których otrzymamy liczbę 7-cyfrową:
   1. dowolną

odp.: wszystkie możliwe oprócz zaczynających się od zera, czyli

* 1. podzielną przez 4

odp.: liczba jest podzielna przez 4 gdy jej ostatnie dwie cyfry są podzielne przez 4, więc 04, 12, 16, 20, 24, 32, 36, 40, 52 lub 56. Dla 04, 20, 40 możemy ustawić 5 pierwszy cyfr na 5! sposobów. Dla reszty końcówek początkowe cyfry możemy ustawić na sposobów, ponieważ 0 nie może być pierwszą cyfrą. Ostatecznie:

1. Wyznacz :

odp.:

skoro

to

= 9

co daje

a więc

1. Ile jest sposobów ustawienia w szereg pięciu chłopców i czterech dziewczynek tak, aby:
2. chłopcy i dziewczynki stali na zmianę

odp.:

1. pierwszy i drugi stał chłopiec

odp.: ponieważ wybieramy 2 chłopców z 5-ciu, daj wybrani mogą się ustawić na dwa sposoby, a pozostałe 7 miejsc to wszystkie możliwe ustawienia w obrębie pozostałych 7 osób

1. najpierw stały dziewczynki , a następnie chłopcy

odp.:

1. pierwsza stała dziewczynka

odp.:

1. Ile jest liczb trzycyfrowych:
   1. parzystych

odp.: Liczba parzysta wtedy, gdy jej ostatnia cyfra jest parzysta lub jest zerem (2, 4, 6, 8, 0), a więc: ponieważ na pierwszym miejscu nie występuje 0

* 1. podzielnych przez 5

odp.: ostatnia cyfra musi być elementem zbioru {0, 5}, a więc

* 1. o tej samej cyfrze setek i jedności

odp.:

* 1. większych od 546

odp.: Najpierw od 600 w górę - , pomiędzy 550 i 600 - , pomiędzy 546 i 550 – 3, w sumie:

* 1. mniejszych od 345

odp.:

1. Oblicz liczbę elementów pewnego zbioru skończonego wiedząc, że ma on 79 podzbiorów co najwyżej dwuelementowych.

odp.: – liczba podzbiorów jednoelementowych, - liczba podzbiorów dwuelementowych, 1 podzbiór pusty. , po rozwiązaniu wychodzi

1. Z talii 52 kart losujemy cztery karty. Ile jest możliwych wyników losowania, jeśli wśród nich mają być co najwyżej trzy kiery?

odp.: Wszystkie możliwości, oprócz tych, w których wylosujemy 4 kiery. Różnica pomiędzy wszystkimi kombinacjami, a tymi z 4 kierami:

1. W pudełku znajduje się 5 kul białych i 4 czarne. Na ile sposobów można wyjąć z pudełka 3 kule tak, aby otrzymać:
   1. 3 kule czarne

odp.: 4

* 1. 3 kule białe

odp.: 10

* 1. dwie kule białe i jedną czarną

odp.: 40

* 1. Co najmniej jedna kulę białą

odp.: zero kul białych – 4, wszystkie możliwości - , więc 84-4 = 80

1. Używamy 32-kartowej talii, zawierającej osiem kart w czterech kolorach. Starszeństwo kart: as(A), król(K), dama(D), walet(W), dziesiątka(10), dziewiątka(9), ósemka(8), siódemka(7). Grający w jednym rozdaniu pokera otrzymują po pięć kart.  
   Ile układów kart w pokerze to:
   1. full - trzy karty tej samej wysokości i dwie karty innej

odp.: , ponieważ wybieramy z 8 wariantów 1 rodzaj karty, która będzie stanowiła trójkę, a następnie wybieramy 3 konkretne karty, podobnie w drugim przypadku, gdzie jest to rodzaj karty stanowiącej parę – istotna jest kolejność, bo DD888 to co innego niż 88DDD.

* 1. dwie pary - dwie karty tej samej wysokości, dwie innej i ostatnia karta jeszcze innej

odp.:

* 1. kareta - cztery karty tej samej wysokości i jedna dowolna z pozostałych

odp.:

* 1. kolor - pięć kart w jednym kolorze, ale nie wszystkie kolejno (bez pokerów)

odp.: , ponieważ musimy odjąć 4 pokery

1. Rzucono 3 razy monetą i wypadła nieparzysta liczba orłów (zdarzenie B). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadły 3 orły (zdarzenie A)?

odp.: , więc

1. Rzucono 2 razy kostką do gry i w pierwszym rzucie wypadło 6 oczek (zdarzenie B). Jakie jest prawdopodobieństwo, że w obu rzutach wypadnie co najmniej 10 oczek (zdarzenie A)?

odp.:

1. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania 3 szóstek w 3 rzutach kostką.

odp.:

1. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania dokładnie 1 króla z tali 52 kart w 5 losowaniach.

odp.:

1. Co jest bardziej prawdopodobne: uzyskanie 500 orłów w 1000 rzutów monetą, czy uzyskanie 5000 orłów w 10000 rzutów monetą?

odp.:

1. Gracz rzuca 2 lotkami do tarczy. Pierwszy rzut był lepszy od drugiego. Jakie jest prawdopodobieństwo, że 3 rzut będzie gorszy od pierwszego?

odp.: Tylko opcje 1, 2 i 4 spełniają warunek, że Rzut 1 jest lepszy niż Rzut 2 (a – najlepszy, b – średni, c – najgorszy)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Opcja 1 | Opcja 2 | Opcja 3 | Opcja 4 | Opcja 5 | Opcja 6 |
| Rzut 1 | A | A | B | B | C | C |
| Rzut 2 | B | C | A | C | A | B |
| Rzut 3 | C | B | C | A | B | A |

Tylko opcje 1 i 2 spełniają trzeci warunek, czyli rzut 3 jest gorszy niż Rzut 1, a więc prawdopodobieństwo jest

1. Dwie osoby grają w rosyjską ruletkę 6-strzałowym rewolwerem, w którym znajdują się 3 naboje, załadowane w trzech sąsiednich komorach. Kręcimy bębnem, a następnie gracz A przystawia sobie rewolwer do głowy i strzela, a jeżeli przeżyje to samo robi gracz B (bez kręcenia bębnem). Który gracz ma większe szanse na przeżycie? Gracz pierwszy (A) czy gracz drugi (B)?

odp.: Większe szanse na przeżycie ma gracz B

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | X | X | O | O | O | Ginie A |
| O | X | X | X | O | O | Ginie B |
| O | O | X | X | X | O | Ginie A |
| O | O | O | X | X | X | Ginie B |
| X | O | O | O | X | X | Ginie A |
| X | X | O | O | O | X | Ginie A |

1. W urnie X mamy: 5 kul białych, 4 czarne, a w urnie Y: 3 kule białe, 1 czarna. Rzucamy symetryczną kostką. Jeżeli wypadnie parzysta liczba oczek losujemy 1 kulę z urny X, jeżeli nieparzysta losujemy 1 kulę z urny Y. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?

odp.: więc

1. Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek?

odp.:

