Ekonomia matematyczna II

Prowadzący ćwiczenia

mgr inż. Piotr Betlej

Programowanie nieliniowe – optymalizacja funkcji wielu zmiennych

Modele programowania liniowego często okazują się niewystarczające w modelowaniu rzeczywistości gospodarczej. Model liniowy jedynie przybliża realną sytuację ekonomiczną. Uzyskanie opisu układu gospodarczego, który adekwatnie odzwierciedlałby rozpatrywane relacje ekonomiczne, wymaga zastosowania modelu uwzględniającego wszystkie jego komplikacje. Taka możliwość pojawiła się z chwilą wprowadzenia innych niż liniowe dziedzin programowania matematycznego.

Elementy programowania nieliniowego

Programem nieliniowym nazywamy zadanie o postaci:

$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ -->> min (lub max),

przy warunkach ograniczających:

$g_i(x) = g_1(x_1, x_2, \ldots x_n) <= 0$ lub $>= 0$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, r)$,

$x_1, x_2, \ldots, x_n >= 0$

gdzie przynajmniej jedna z funkcji: *f* lub g_i nie jest funkcją liniową, przy czym zakłada się, że funkcje *f* i g_i są ciągłe.

W przeciwieństwie do programowania liniowego, gdzie uniwersalną metodą rozwiązywania jest algorytm simpleks, nie ma ogólnej metody rozwiązywania programów nieliniowych. Metoda rozwiązywania zależy od postaci, jaką zadanie przyjmuje.

Funkcje dwóch zmiennych

Funkcją rzeczywistą dwóch zmiennych nazywamy odwzorowanie $f: R^2 \to R$ czyli przyporządkowanie każdej parze liczb rzeczywistych (x,y) dokładniej jednej liczby rzeczywistej z, czyli:

$$f(x,y) \to z(x,y) \in R^2 \qquad z \in R$$

Przykłady funkcji dwóch zmiennych:

$$f(x,y) = 64x - 2x^2 + 4xy - 4y^2 + 32y - 14$$

$$f(x,y) = \sqrt{xy}$$

$$f(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$f(x,y) = \arcsin\frac{x}{y}$$

Wyznaczanie dziedziny funkcji:

Dziedziną funkcji $z = f(x, y)$ nazywamy zbiór tych wszystkich $(x, y) \in R^2$, dla których wzór funkcyjny $f(x, y)$ ma sens liczbowy.

<u>Przykład 1</u>

Znajdź dziedzinę funkcji:

$$f(x,y) = \frac{1}{xy} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

<u>Rozwiązanie:</u>

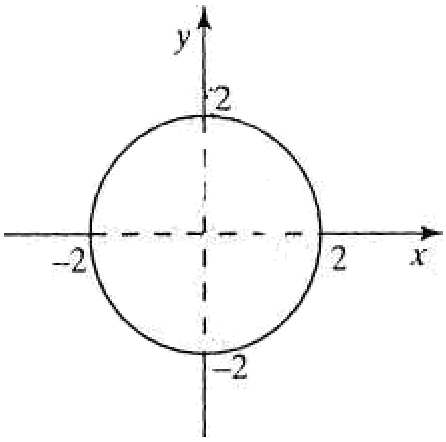
Aby powyższy przepis miał sens, należy założyć, że wyrażenie występujące w mianowniku jest różne od zera i wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne. Zatem:

xy $\neq 0$ i $4 - x^2 - y^2 \geq 0$

Po przekształceniu otrzymujemy:

x$\neq 0$ i y$\neq 0$ i $x^2 + y^2 \leq 4$

Na płaszczyźnie będzie to obszar złożony z czterech ćwiartek koła o środku w punkcie (0,0) i promieniu 2, bez odcinków osi 0x i 0y zawartych w tym kole.



Przykład 2

Znajdź dziedzinę funkcji:

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - \ln(4 - x^2 - y^2)$$

Rozwiązanie:

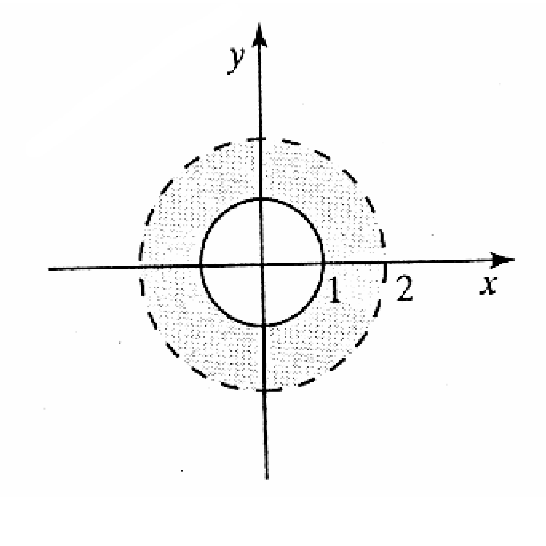
Aby powyższy przepis miał sens, należy założyć, że wyrażenie pod pierwiastkiem jest nieujemne oraz wyrażenie logarytmowanego jest dodatnie:

$x^2 + y^2 - 1 \geq 0$ i $4 - x^2 - y^2 > 0$

co po przekształceniu daje:

$x^2 + y^2 \geq 1$ i $x^2 + y^2 < 4$

Na płaszczyźnie jest to pierścień ograniczony okręgami o środkach w punkcie (0,0) i odpowiednio promieniach *r =1, r = 2.* wraz z okręgiem o promieniu 1, zaś bez brzegu (okręgu) zewnętrznego:



Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych

Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

Jeżeli istniej (i jest skończona) granica:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_{0,}y_0)}{x-x_0},$$

to nazywamy ją pochodną cząstkową rzędu pierwszego funkcji *f(x,y)* względem zmiennej x w punkcie (x_0, y_0) i oznaczamy symbolem $f^{'}x(x_o,y_0)$.

Analogicznie: niech x = x_0. Jeżeli istnieje (i jest skończona) granica:

$$\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_{0,}y_0)}{y-y_0}$$

to nazywamy ją pochodną cząstkową rzędu pierwszego funkcji *f(x,y)* względem zmiennej y w punkcie (x_0, y_0) i oznaczamy symbolem $f^{'}y(x_o,y_0)$.

Pochodne cząstkowe drugiego rzędu

Pochodne cząstkowe rzędu drugiego są to pochodne cząstkowe pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego. Oznaczamy je odpowiednio:

$$f_{xx}^{''}(x_0,y_0)=(f^{'}{}_x)_x^{'}(x_0,y_0)$$

$$f_{xy}^{''}(x_0,y_0)=(f^{'}{}_x)_y^{'}(x_0,y_0)$$

$$f_{yx}^{''}(x_0,y_0)=(f^{'}{}_y)_x^{'}(x_0,y_0)$$

$$f_{yy}^{''}(x_0,y_0)=(f^{'}{}_y)_y^{'}(x_0,y_0)$$

Obliczanie pochodnych cząstkowych funkcji dwóch zmiennych sprowadza się więc, przy ustaleniu jednej z nich ($x=x_0$ lub $y=y_0$), do obliczania pochodnych funkcji jednej zmiennej.

Przykład 3

Wyznacz pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu następującej funkcji:

$$f(x,y)=x^2y-xy^2+\frac{1}{3}y^3-9y$$

Rozwiązanie

Pochodne pierwszego rzędu:

$f'x(x,y) = 2xy - y^2$

$f'y(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - 9$

Pochodne drugiego rzędu:

$f_{xx}''(x,y) = 2y$

$f_{xy}''(x,y) = 2x - 2y$

$f_{yx}''(x,y) = 2x - 2y$

$f_{yy}''(x,y) = -2x + 2y$

Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych

Optymalizacja funkcji wielu zmiennych w ekonomii

Funkcja *f(x,y)* ma w punkcie $P_o(x_o,y_o)$ **maksimum lokalne** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu *P(x,y)* należącego do pewnego sąsiedztwa $P_o(x_o,y_o)$ spełniona jest nierówność:

$f(x,y)<f(x_0,y_0)$.

Funkcja *f(x,y)* ma w punkcie $P_o(x_o,y_o)$ **minimum lokalne** wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu *P(x,y)* należącego do pewnego sąsiedztwa $P_o(x_o,y_o)$ spełniona jest nierówność:

$f(x,y)>f(x_0,y_0)$.

Warunek konieczny istnienia ekstremum

Jeżeli funkcja *f(x,y)* ma ekstremum lokalne w punkcie $P_o(x_o,y_o)$ oraz istnieją pochodne cząstkowe:

$f_x'(x_0,y_0)$ i $f_y'(x_0,y_0)$

to:

$f_x'(x_0,y_0) = 0$ i $f_y'(x_0,y_0) = 0$.

Punkt, w którym spełniony jest warunek konieczny, nazywamy **punktem stacjonarnym**.

Warunek wystarczający istnienia ekstremum

Jeżeli funkcja *f* ma w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego $P_o(x_o,y_o)$ pochodne pierwszego i drugiego rzędu ciągle oraz:

$$W(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$$

to w punkcie $P_o(x_o,y_o)$ **istnieje ekstremum lokalne**.

W przypadku gdy dodatkowo $f_{xx}''(x_0,y_0) > 0$ lub $f_{yy}''(x_0,y_0) > 0$, to w punkcie $P_o(x_o,y_o)$ istnieje **minimum lokalne**;

Jeśli zaś dodatkowo $f_{xx}''(x_0,y_0) < 0$ lub $f_{yy}''(x_0,y_0) < 0$, to w punkcie $P_o(x_o,y_o)$ istnieje **maksimum lokalne**.

Jeżeli $\mathbf{W(x_0, y_0) < 0}$, to w punkcie stacjonarnym $P_o(x_o,y_o)$ **nie ma ekstremum**.

Uwaga: jeżeli $\mathbf{W(x_0, y_0) = 0}$, to w punkcie $P_o(x_o,y_o)$ ekstremum może istnieć lub nie, czyli w tym przypadku twierdzenie nie rozstrzyga istnienia ekstremum. Należy wówczas posłużyć się definicją lub innymi metodami poszukiwania ekstremum.

Z powyższych twierdzeń wynika następujący schemat wyznaczania ekstremów funkcji
z = f(x,y)

1) obliczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego $f_x'(x_0,y_0)$ i $f_y'(x_0,y_0)$ oraz przyrównujemy je do zera, znajdując w ten sposób punkty stacjonarne,

2) znajdujemy pochodne cząstkowe rzędu drugiego i tworzymy wyznacznik **W(x,y)**,

3) obliczamy kolejno znak wyznacznika W(x,y) w punktach stacjonarnych, a w przypadku gdy jest on większy od zera, badamy także znak pochodnej $f_{xx}''(x_0,y_0) < 0$ lub $f_{yy}''(x_0,y_0)$ w tych punktach.

Przykład 4

Dla podanej poniżej funkcji produkcji przedsiębiorstwa produkującego wyroby x i y wyznacz optymalną wielkość produkcji obliczając ekstrema lokalne funkcji:

$$f(x,y) = 2x^3 + y3 - 6x - 12y$$

Rozwiązanie

Dziedziną tej funkcji jest R^2 czyli (x,y) e R^2. Szukamy najpierw - zgodnie ze schematem podanym wyżej - punktów stacjonarnych, czyli pochodne cząstkowe pierwszego rzędu przyrównujemy do zera.

$f_x'(x,y) = 6x^2 - 6$ i $f_y'(x,y) = 3y^2 - 12$

i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{matrix} 6x^2 - 6 = 0 \\ 3y^2 - 12 = 0 \end{matrix} \dashrightarrow \begin{matrix} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 4 = 0 \end{matrix} \dashrightarrow \begin{matrix} x = 1 \vee x = -1 \\ y = 2 \vee y = -2 \end{matrix}$$

a stąd otrzymujemy cztery punkty stacjonarne: $P_1(1,2)$, $P_2(1,-2)$, $P_3(-1,2)$, $P_4(-1,-2)$ w których spełniony jest warunek konieczny istnienia ekstremum, czyli 4 punkty, w których może być ekstremum.

Następnie obliczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu i tworzymy wyznacznik *W(x,y):*

$f_{xx}''(x,y) = 12x$ $f_{xy}''(x,y) = 0$ $f_{yx}''(x,y) = 0$ $f_{yy}''(x,y) = 6y$

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix}$$

Badamy teraz kolejno znak wyznacznika w punktach $P_1(1,2)$, $P_2(1,-2)$, $P_3(-1,2)$, $P_4(-1,-2)$ i na podstawie warunku wystarczającego wnioskujemy o istnieniu ekstremum lokalnego.

Badamy punkt $P_1(1,2)$

$W(P_1) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 144 > 0$ zatem istnieje ekstremum

$f_{xx}''(1,2) > 0$ zatem w punkcie $P_1(1,2)$ istnieje minimum lokalne

Badamy punkt $P_2(1,-2)$

$W(P_2) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = -144$ < 0 zatem w tym punkcie nie istnieje ekstremum

Badamy punkt $P_3(-1,2)$

$W(P_3) = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = -144$ < 0 zatem w tym punkcie nie istnieje ekstremum

Badamy punkt $P_4(-1,-2)$

$W(P_4) = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 144$ > 0 zatem istnieje ekstremum

$f_{xx}^{''}(-1,-2)$ = -12 < 0 zatem w punkcie $P_4(-1,-2)$ istnieje maksimum lokalne

Odpowiedź:

Przedstawiona w zadaniu funkcja ma dwa ekstrema lokalne: minimum lokalne w punkcie $P_1(1,2)$ i maksimum lokalne w punkcie $P_4(-1,-2)$, przy czym:

fmin = f(1,2) = 2 + 8 – 6 – 24 = -20

fmax = f(-1,-2) = -2 -8 +6 +24 = 20.

Przykład 5

Sprawdzić, czy w podanych punktach $P_1(1,2)$ i $P_2(0,0)$ funkcja:

$$f(x,y) = 2xy - 6x^2 - y^2 + 10$$

ma ekstremum lokalne.

Rozwiązanie

Aby odpowiedzieć na postawione pytanie, należy najpierw zbadać, czy podane punkty są punktami stacjonarnymi. W tym celu obliczamy:

$$f'_x(x,y) = 2y - 12x \qquad f'_y(x,y) = 2x - 2y$$

Badamy punkt $P_1(1,2)$

$f'_x(P_1)$ = $f'_x(1,2)$ = 4 – 12 ≠0, czyli w punkcie $P_1(1,2)$ nie jest spełniony warunek konieczny istnienia ekstremum, a więc w punkcie $P_1(1,2)$ rozważana funkcja nie ma ekstremum.

Natomiast $f'_x(P_2)$ = $f'_x(0,0)$ = 0,, czyli punkt $P_2(0,0)$ jest punktem stacjonarnym. Sprawdzamy więc, czy w tym punkcie spełniony jest warunek wystarczający:

$f_{xx}''(x,y)$ = -12 $f_{xy}''(x,y)$ = 2 $f_{yx}''(x,y)$ = 2 $f_{yy}''(x,y)$ = -2

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} -12 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 20$$

$W(x,y)$ = 20 > 0, a więc w punkcie $P_2(0,0)$ dana funkcja $f(x,y) = 2xy - 6x^2 - y^2 + 10$ ma ekstremum i jest to maksimum lokalne, ponieważ $f_{xx}''(x,y)$ < 0.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Podaj dziedzinę funkcji:

a. $f(x,y)=\sqrt{y-x+2}+\ln(x-y^2+4)$

b. $f(x,y)=\sqrt{(x^2+y^2-4)(9-x^2-y^2)}$

c. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\ln(x+y)}$

d. $f(x,y)=\dfrac{\ln|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$

2. Wyznacz pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu następującej funkcji:

a. $f(x,y)=4x^4y^2-12x^2y-4xy^3+15x^2y^4$

b. $f(x,y)=2xy^2-2x^2y-5xy^3+120$

c. $f(x,y)=12xy-8x^4y-5xy^3$

3. Wyznacz ekstrema następujących funkcji kosztów danego przedsiębiorstwa:

a. $f(x,y)=2x^3y+y^2+3x^2$

b. $f(x,y)=x^2y-xy^2+\dfrac{1}{3}y^3-9y$

c. $f(x,y)=x^3+y^3-6xy+9x+5y+2$