Wykład 13 – zadania domowe

1. **Sprawdzić, że podana funkcja $(\cdot,\cdot)$ jest iloczynem skalarnym w rozważanej przestrzeni liniowej:**

$$(\vec{x},\vec{y})=2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2 \quad dla \quad \vec{x}=(x_1,x_2),\ \vec{y}=(y_1,y_2)\ \in\ R^2$$

$$1.(\vec{x},\vec{y})=2x_1y_1-x_1y_2+x_2y_2=2y_1x_1-y_1x_2-y_2x_1+y_2x_2=(\vec{y},\vec{x})$$

$$2.(\vec{x}+\vec{y},\vec{w})=2(x_1+y_1)w_1-2(x_1+y_1)w_2-2(x_2+y_2)w_1+2(x_2+y_2)w_2=$$
$$=(2x_1w_1-x_1w_2-x_2w_1+x_2w_2)+(2y_1w_1-y_1w_2-y_2w_1+y_2w_2)=\langle\vec{x},\vec{w}\rangle+\langle\vec{y},\vec{w}\rangle$$

$$3.\langle\alpha\vec{x},\vec{y}\rangle=2(\alpha x_1)y_1-(\alpha x_1)y_2-(\alpha x_2)y_1+(\alpha x_2)y_2=$$
$$=\alpha(2x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+x_2y_2)=\alpha\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$$

$$4.\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$$
$$\Delta x_1=4x_2^2-8x_2^2=-4x_2^2\leqslant 0 \ \Rightarrow\ \langle\vec{x},\vec{x}\rangle\geqslant 0$$
$$\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=0\ \Leftrightarrow\ \vec{x}=0$$
$$2x_1^2-2x_1x_2+x_2^2=0\ \Leftrightarrow\ \Delta\geqslant 0\ \Leftrightarrow\ x_2=0$$
$$jeden\ pierwiastek: x_1=\frac{2x_2}{4}=\frac{x_2}{2}\Rightarrow x_1=0,\ ponieważ\ x_2=0$$

2. **Zortogonalizować metodą Grama – Schmidta podane wektory w odpowiednich przestrzeniach euklidesowch**

a) $[2,1,3],[1,6,2]$ w przestrzeni E^3

$$\vec{v}_1=\vec{u}_1=[2,1,3]$$
$$\vec{v}_2=\vec{u}_2-\frac{\langle\vec{u}_2,\vec{v}_1\rangle}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1=[1,6,2]-\frac{14}{14}[2,1,3]=[-1,5,-1]$$

b) $[4,3,0,0],[4,3,2,0],[4,3,2,1]$ w przestrzeni E^4

$$\vec{u}_1=[4,3,0,0]$$
$$\vec{u}_2=[4,3,2,0]$$
$$\vec{u}_3=[4,3,2,1]$$

$$\vec{v}_1=[4,3,0,0]$$
$$\vec{v}_2=[0,0,2,0]$$
$$\vec{v}_3=[0,0,0,1]$$

3. **Znaleźć rzut ortogonalny podanego wektora na wskazaną podprzestrzeń przestrzeni euklidesowej:**

$$\vec{u}=[3,1,2,0]\in E^4,\quad E_0=lin\{[1,2,1,2],[0,1,1,1]\}$$

Sprawdzamy czy baza przestrzeni euklidesowej składa się z wektorów ortogonalnych:

$$\vec{e}_1=[1,2,1,2],$$
$$\vec{e}_2=[0,1,1,1]$$

$$\langle \vec{e}_1,\vec{e}_2\rangle=5\neq 0\Rightarrow \textit{wektory nie są ortogonalne}$$

Ortogonalizujemy wektory:

$$\vec{v}_1=\vec{e}_1=[1,2,1,2]$$
$$\vec{v}_2=\vec{e}_2-\frac{\langle \vec{e}_2,\vec{v}_1\rangle}{\|\vec{v}_1\|^2}\cdot\vec{v}_1=[0,1,1,1]-\frac{1}{2}\cdot[1,2,1,2]=\left[-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right]$$

$$\langle \vec{v}_1,\vec{v}_2\rangle=0\Rightarrow \textit{wektory są ortogonalne}$$

Wyznaczamy rzut wektora ortogonalnego:

$$u_0=\frac{\langle \vec{u},\vec{v}_1\rangle}{\|\vec{v}_1\|^2}\cdot\vec{v}_1+\frac{\langle \vec{u},\vec{v}_2\rangle}{\|\vec{v}_2\|^2}\cdot\vec{v}_2$$

$$\langle \vec{u},\vec{v}_1\rangle=7$$
$$\langle \vec{u},\vec{v}_2\rangle=-\frac{1}{2}$$
$$\|v_1\|^2=10$$
$$\|v_2\|^2=\frac{1}{2}$$
$$u_0=\frac{7}{10}[1,2,1,2]-\left[-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right]=\left[\frac{7}{10},\frac{14}{10},\frac{7}{10},\frac{14}{10}\right]-\left[-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0\right]=\left[\frac{6}{5},\frac{7}{5},\frac{1}{5},\frac{7}{5}\right]$$

4. **W przestrzeni euklidesowej** E^4 **:**

a) obliczyć normę wektora (-1,1,2,-3)

$$\sqrt{1+1+4+9}=\sqrt{15}$$

b) zbadać ortogonalność wektorów (1,4,-1,2), (3,-1,2,-1)

$$\langle[1,4,-1,2],[3,-1,2,-1]\rangle=3-4-2-2=-5\neq 0$$
$$\Rightarrow \textit{wektory nie są ortogonalne}$$

c) obliczyć kąt między wektorami (1,3,0,-1),(3,1,1,0)

$$\langle[1,3,0,-1],[3,1,1,0]\rangle=3+3=6$$
$$\|[1,3,0,-1]\|*\|[3,1,1,0]\|=\sqrt{(1+9+1)}*\sqrt{(9+1+1+0)}=11$$
$$\cos\varphi=\frac{6}{11}\Rightarrow\varphi=\arccos(\frac{6}{11})$$