Wykład 11 – zadania domowe - ODP

1. Uzasadnić liniowość wskazanego przekształcenia przestrzeni liniowej

$$R^3 \to R^2, \quad L(x,y,z) = (x+y, 2x-y+3z)$$

$$\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{y} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$L\left(c_1\vec{x} + c_2\vec{y}\right) = L(c_1x_1 + c_2x_2, c_1y_1 + c_2y_2, c_1z_1 + c_2z_2) =$$

$$= [c_1x_1 + c_2x_2 + c_1y_1 + c_2y_2, 2(c_1x_1 + c_2x_2) - c_1y_1 - c_2y_2 + 3(c_1z_1 + c_2z_2)] =$$

$$= [c_1(x_1 + y_1) + c_2(x_2 + y_2), c_1(x_1 + y_1, 2x_1 - y_1 + 3z_1) + c_2(2x_2 - y_2 + 3z_2) +] =$$

$$= c_1(x_1 + y_1, 2x_1 - y_1 + 3z_1) + c_2(x_2 + y_2, 2x_2 - y_2 + 3z_2) = c_1L\left(\vec{x}\right) + c_2L\left(\vec{y}\right)$$

c.b.d.u

2. Macierz przekształcenia liniowego $L:U\to V$ ma w bazach $\left\{\vec{u}_1,\vec{u}_2\right\},\left\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\right\}$ przestrzeni liniowych U, V postać:

$$A_L=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}$$

Wyznaczyć obrazy podanych wektorów w tym przekształceniu:

a. $\vec{u}=-2\vec{u}_1+3\vec{u}_2$

b. $\vec{u}=6\vec{u}_1-\vec{u}_2$

I sposób:

Z interpretacji macierzy przekształcenia liniowego:

$$a)\quad L(\vec{u})=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 5\\ -16\end{bmatrix}\ \text{w bazie}\ \left\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\right\}$$

$$b)\quad L(\vec{u})=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 1\\ 2 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\ -7\\ 16\end{bmatrix}\ \text{w bazie}\ \left\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\right\}$$

II sposób:

Zgodnie z definicją macierzy przekształcenia liniowego mamy:

$$L\left(\vec{u}_1\right)=3\vec{v}_1-\vec{v}_2+2\vec{v}_3$$

$$L\left(\vec{u}_2\right)=2\vec{v}_1+\vec{v}_2-4\vec{v}_3$$

$$a)L\left(\vec{u}\right)=-2L\left(\vec{u}_1\right)+3L\left(\vec{u}_2\right)=-2\left(3\vec{v}_1-\vec{v}_2+2\vec{v}_3\right)+3\left(2\vec{v}_1+\vec{v}_2-4\vec{v}_3\right)=5\vec{v}_2-16\vec{v}_3$$

$$b)L\left(\vec{u}\right)=6L\left(\vec{u}_1\right)-L\left(\vec{u}_2\right)=6\left(3\vec{v}_1-\vec{v}_2+2\vec{v}_3\right)-\left(2\vec{v}_1+\vec{v}_2-4\vec{v}_3\right)=16\vec{v}_1-7\vec{v}_2+16\vec{v}_3$$

3. Wyznaczyć jądro i obraz podanego przekształcenia liniowego

$$L : R^2 \to R^2, \quad L(x,y) = (2x-y, 3y-6x)$$

$$KerL = \{(x,y) \in R^2 : 2x - y = 3y - 6x = 0\} = \{(x,2x) : x \in R\} = lin\{(1,2)\}$$

$$\operatorname{Im} L = \{(2x-y, 3y-6x) : x, y \in R\} = lin\{(2,-6),(-1,3)\} = lin\{(-1,3)\}$$

4. Znaleźć wartości i wektory własne podanych macierzy rzeczywistych

Przypadek a)

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} \sqrt{3}-\lambda & -1 \\ 1 & \sqrt{3}-\lambda \end{bmatrix} = \left(\sqrt{3}-\lambda\right)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4$$

$$\Delta = 12 - 16 = -4$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \textit{nie ma pierwiastkow rzeczywistych}$$

Przypadek b)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 & -5 \\ 0 & -3-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda) = -(\lambda-4)(\lambda+3)(\lambda-2)$$

$$\lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = -3 \vee \lambda_3 = 4$$

Wektor własny dla wartości własnej $\lambda_1 = 2$:

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 4-2 & 1 & -5 \\ 0 & -3-2 & 5 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 5z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = z \\ z - dowolne \end{cases}$$

$$np.\ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wektor własny dla wartości własnej $\lambda_2 = -3$:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 4+3 & 1 & -5 \\ 0 & -3+3 & 5 \\ 0 & 0 & 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 7x + y - 5z = 0 \\ 5z = 0 \\ 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{y}{7} \\ y - \text{dowolne} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$np.\ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wektor własny dla wartości własnej $\lambda_3 = 4$:

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} 4-4 & 1 & -5 \\ 0 & -3-4 & 5 \\ 0 & 0 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y - 5z = 0 \\ -7y + 5z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \text{dowolne} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$np.\ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$