Wykład 8 – zadania domowe - ODP

1. Rozwiąż metodą eliminacji Gaussa:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + t = 1 \\ 2x + 4y - z + 2t = 2 \\ 3x + 6y + 10z + 3t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

Macierz rozszerzona układu: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 10 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Kolejne operacje równoważne na macierzy rozszerzonej:

- Zamiana miejscami wiersza 1 i wiersza 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 10 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- wiersz2 – 2*wiersz1
- wiersz3 – 3*wiersz1
- wiersz4 – wiersz1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- wiersz1 – wiersz 4
- wiersz2 – 2*wiersz4
- wiersz3 – 3*wiersz4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- wiersz2 + 7*wiersz3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- wiersz3 – 2*wiersz2
- wiersz1 + wiersz2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - t \\ y = 1 \\ z = 0 \\ t - parametr \end{cases}$$

Rozwiązanie

2. Dla jakich wartości parametru p poniższy układ równań jest układem Cramera ? Rozwiązać go przyjmując $p = -2$

$$\begin{cases} px + 3y - z = 1 \\ x + y - pz = 13 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} p & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -p \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad |A| = \begin{vmatrix} p & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -p \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = p^2 - 10p + 5$$

$$p^2 - 10p + 5 = 0$$

$$\Delta = 100 - 20 = 80$$

$$\sqrt{\Delta} = 4\sqrt{5}$$

$$p_1 = \frac{10 - 4\sqrt{5}}{2} = 5 - 2\sqrt{5}; \quad p_2 = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{2} = 5 + 2\sqrt{5}$$

Układ jest układem Cramera gdy $|A| \neq 0$ czyli dla $p \notin \{5 - 2\sqrt{5}, 5 + 2\sqrt{5}\}$

Rozwiązanie dla $p = -2$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad |A| = 29$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad |D_1| = 58$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 13 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad |D_2| = 87$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 13 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad |D_3| = 116$$

$$x = \frac{|D_1|}{|A|} = 2 \quad y = \frac{|D_2|}{|A|} = 3 \quad z = \frac{|D_3|}{|A|} = 4$$

3. **W podanym układzie równań liniowych określić (nie rozwiązując go) liczbę rozwiązań oraz liczbę parametrów.**

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \\ 3x+2y+z=3 \end{cases} \qquad A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad A\,|\,B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Należy skorzystać z twierdzenia Kroneckera – Capelliego, czyli określić ilość rozwiązań bazując na rzędach macierzy głównej i rozszerzonej oraz liczbie niewiadomych.

$|A|=0$ ponieważ wiersz3 = wiersz1 + wiersz2 $\Rightarrow Rz(A)<4$

Aby sprawdzić czy macierz A jest rzędu 3-go stosujemy minor powstały w wyniku skreślenia 3-go wiersza.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow Rz(A)<3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1 \Rightarrow Rz(A)=2$$

Badamy teraz rząd macierzy rozszerzonej:

$|A\,|\,B|=0$ ponieważ wiersz3 = wiersz1 + wiersz2 $\Rightarrow Rz(A\,|\,B)<4$

Aby sprawdzić czy macierz $A\,|\,B$ jest rzędu 3-go stosujemy minor powstały w wyniku skreślenia 3-go wiersza i 1-szej kolumny (identycznej z kolumną 4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow Rz(A\,|\,B)<3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=1 \Rightarrow Rz(A\,|\,B)=2$$

$$\left.\begin{aligned} & Rz(A)=2 \\ & Rz(A\,|\,B)=2 \\ & n=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Rz(A)=Rz(A\,|\,B)<n$$

Jest to układ nieoznaczony zależny od 1-go parametru.

4. Określić liczby rozwiązań podanego układu równań liniowych w zależności od parametru rzeczywistego p

$$\begin{cases} (p+1)x - y + pz = 1 \\ (3-p)x + 4y - pz = -4 \\ px + 3y = -3 \end{cases}$$

Rząd macierzy A badamy poprzez obliczanie minorów kolejno stopnia 3 i 2:

$$A = \begin{bmatrix} p+1 & -1 & p \\ 3-p & 4 & -p \\ p & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3p(4-p) \Rightarrow |A| \neq 0 \; dla \;\; p \neq 0 \wedge p \neq 4$$

$$A\,|\,B = \begin{bmatrix} p+1 & -1 & p & 1 \\ 3-p & 4 & -p & -4 \\ p & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Kolumna4 = (-1)*kolumna2 czyli licząc wyznacznik bierzemy pod uwagę tylko jeden minor – dokladnie taki jak macierz A. Z tego wynika, że $|A\,|\,B| = |A|$

Dla p=0: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow Rz(A) = 2$

Dla p=4: $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -4 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow Rz(A) = 2$

ODP:

$p \neq 0 \wedge p \neq 4 \Rightarrow$ układ oznaczony

$p = 0 \vee p = 4 \Rightarrow$ układ nieoznaczony z jednym parametrem