

LICZBY ZESPOLONE

$$z = a + bi$$

a – liczba rzeczywista

b – liczba urojona

$$\bar{z} = a - bi$$

$$i^2 = -1$$

Działania na liczbach zespolonych

Przykład:

$$a) (3 - 5i)(2 + 7i) - 18i = 6 - 10i + 21i + 35 - 18i = \mathbf{41 - 7i}$$

b)

$$\frac{3 - 5i}{2 + 7i} * \frac{2 - 7i}{2 - 7i} \quad \therefore \text{mnożymy przez mianownik poprzez sprzężenie} = \frac{6 - 21i - 10i - 35}{4 + 49} =$$

$$= \frac{-29}{53} - \frac{31}{53}i \quad \therefore \text{zawsze zapisujemy wynik w formie sprzężenia}$$

Działania na równaniach liczb zespolonych

Przykład:

W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równanie:

$$a) z^2 = 4\bar{z} \quad z = x + iy \quad ; \quad \bar{z} = x - iy$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 = 4x - 4yi$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 4x - 4yi$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4x \rightarrow x^2 - 4x = y^2 \\ 2xy = -4y \rightarrow 2x = -4(x = -2) \end{cases}$$

$$y^2 = 4 - 4 * (-2)$$

$$y^2 = 4 - 4 * (-2)$$

$$y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm\sqrt{12}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{12} \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{12} \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\sqrt{12} \\ x = -2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = \sqrt{12} \\ x = -2 \end{cases}$$

Dla $y = 0$

$$0 = x^2 - 4x$$

$$0 = x(x - 4)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = -2 - \sqrt{12} \\ z_2 = -2 + \sqrt{12} \\ z_3 = 0 \\ z_4 = 4 \end{cases}$$

b)

$$\overline{z+i} - z + i = 0$$

$$\overline{x+iy+i} - x - iy + i = 0$$

$$x - iy - i - x - iy + i = 0$$

$$-2iy = 0$$

$$y = 0 \rightarrow z \in R \quad \therefore \text{dlatego, że } y \text{ jest równe } 0$$

c)

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

$$\Delta = -36 = 36 * (-1) = 36i^2$$

$$\bar{z} = 6i$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 6i}{2} \rightarrow \begin{cases} z_1 = 2 - 3i \\ z_2 = 2 + 3i \end{cases}$$

Przykład:

Oblicz:

a)

$$\sqrt{3 - 4i} = x + iy \quad \therefore \quad ^2$$

$$3 - 4i = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$x^2 - y^2 \quad \therefore \quad \text{jest to część rzeczywista (Re)}$$

$$2xy * i \quad \therefore \quad \text{jest to część urojona (Im)}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases}$$

$$y \neq 0$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{y} \\ \frac{4}{y^2} - y^2 = 3 \end{cases}$$

$$4 - y^4 = 3y^2$$

$$y^4 + 3y^2 - 4 = 0$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$(t - 1)(t + 4) = 0$$

$$t = 1$$

$$\begin{cases} y = 1 \vee y = -1 \\ x = -2 \vee x = 2 \end{cases}$$

$$x = -2 \vee x = 2$$

Przykład:

Rozwiąż równanie kwadratowe o współczynnikach zespolonych

$$z^2 + (2 + i)z + (-1 + 7i) = 0$$

$$\Delta = (2 + i)^2 * 4(-1 + 7i)$$

$$\Delta = 4 + 4i - 1 + 4 - 28i = 7 - 24i$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{7 - 24i}$$

$$\sqrt{7 - 24i} = x + iy \quad \therefore \quad ^2$$

$$7 - 24i = x^2 + 2xyi - y^2$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ -24 = 2xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{12}{y} \\ \frac{144}{y^2} - y^2 = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{12}{y} \\ 7y^2 = 144 - y^4 \end{cases}$$

$$t = y^2 \rightarrow y \in R$$

$$t^2 + 7t - 144 = 0$$

$$\Delta = 49 + 576 = 625 \rightarrow \sqrt{\Delta} = 25$$

$$t_1 = \frac{-7 - 25}{2} = -16 \text{ } \therefore \text{ niemożliwe}$$

$$t_2 = \frac{-7 + 25}{2} = 9$$

$$y = 3 \vee y = -3$$

$$x = -4 \vee x = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = \begin{cases} -4 + 3i \\ 4 - 3i \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{-2 - i - 4 + 3i}{2} = -\frac{6}{2} + \frac{2i}{2} = -3 + i$$

$$z_2 = \frac{-2 - i + 4 - 3i}{2} = \frac{-2}{2} + \frac{2i}{2} = -1 - 2i$$

Przykład (pojawił się na kolokwium):

Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz zbiór punktów spełniających warunki:

a)

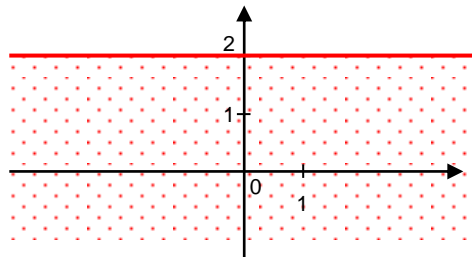
$$\operatorname{Re}(iz + 2) \geq 0$$

$$\operatorname{Re}[i(x + iy) + 2] \geq 0$$

$$\operatorname{Re}(ix - y + 2) \geq 0$$

$$-y + 2 \geq 0$$

$$y \leq 2$$

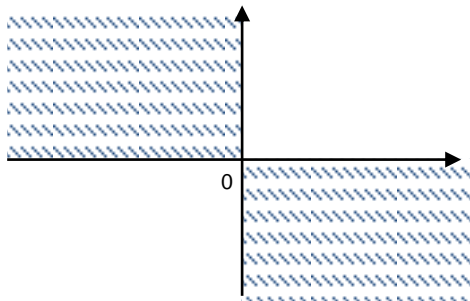


b)

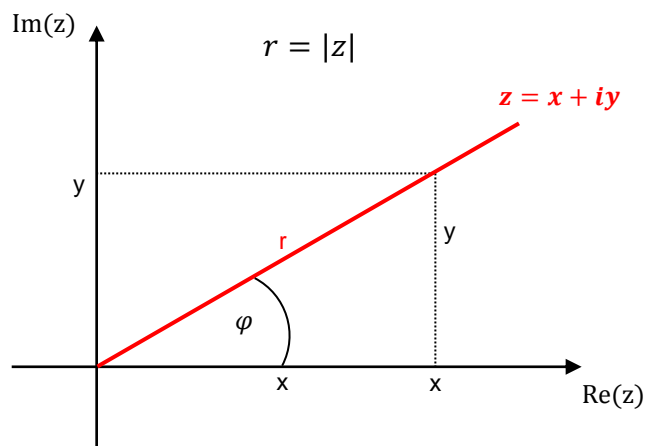
$$\operatorname{Im} z^2 < 0$$

$$\operatorname{Im}(x^2 + 2xyi - y^2) < 0$$

$$2xy < 0$$



Postać trygonometryczna liczb zespolonych



$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} \rightarrow x = r \cos \varphi$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} \rightarrow y = r \sin \varphi$$

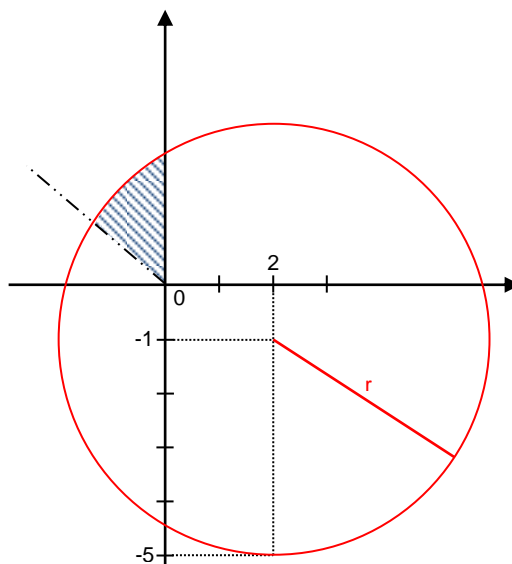
$$z = x + iy = r \cos \varphi + i * r \sin \varphi = r(r \cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Przykład (z zeszłego roku z kolokwium):

Naszkiuj zbiór:

$$|z - 2 + i| \leq 4 \wedge \frac{\pi}{2} < \text{Arg } z < \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} |x + iy - 2 + i| &= |x - 2 + i(y + 1)| = \\ &= \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} \leq 4 \end{aligned}$$



Przykład:

Naszkiuj zbiór:

$$0 \leq \text{Arg}(z - i) \leq \frac{\pi}{6} \wedge |z - 2| < |z - 3|$$

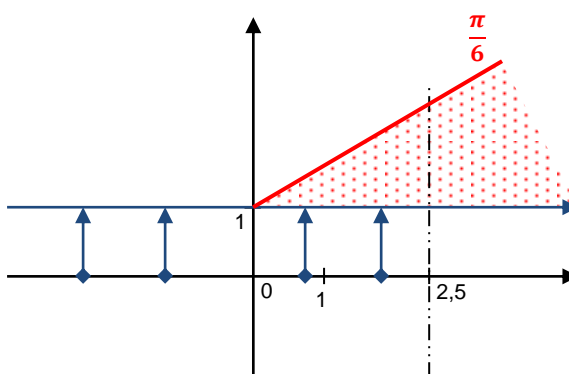
$$(z - i) = x + (1 + y)i$$

$$|x - 2 + iy| < |x - 3 + iy|$$

$$\sqrt{(x - 2)^2 + y^2} < \sqrt{(x - 3)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 < x^2 - 6x + 9 + y^2$$

$$2x < 5 \rightarrow x < 2,5$$



Przykład (z kolokwium sprzed 2 lat):

Naszkiuj zbiór:

$$\text{Arg } z \leq \frac{4\pi}{3} \wedge |2iz + 4| < 6$$

$$|2i(x + iy) + 4| = |2ix - 2y + 4| =$$

$$= 2|i(x - y + 2)| = 2\sqrt{(y - 2)^2 + x^2} < 6$$

