Wykład 14 – zadania domowe-ODP

1. Oblicz iloczyn wektorowy podanych wektorów:

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \quad \vec{v} = -4\vec{i} + \vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{i} &= [1,0,0,] \\ \vec{j} &= [0,1,0] \\ \vec{k} &= [0,0,1] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{u} = [3,2,0] \quad \vec{v} = [-4,1,5]$$

$$\vec{u}\, x\, \vec{v} = \left[\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \right] = [10,-15,11]$$

2. Oblicz pole równoległoboku rozpiętego na wektorach [0, 3, -2], [-1, 2, 5].

Korzystamy z faktu że pole równoległoboku rozpiętego na dwóch wektorach liniowo niezależnych jest równe długości iloczynu wektorowego tych wektorów

$$\vec{a} = [0,3,-2]$$

$$\vec{b} = [-1,2,5]$$

$$P = \left\| \vec{a}\, x\, \vec{b} \right\|$$

$$\vec{a}\, x\, \vec{b} = \left[\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right] = [19,2,3]$$

$$P = \sqrt{19^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{361 + 4 + 9} = \sqrt{374}$$

3. **Oblicz pole obrazu równoległoboku *R* ([1, 3, 0], [2, 3, -1]] po przekształceniu liniowym opisanym macierzą:**

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Obliczamy obrazy wektorów po przekształceniu i liczymy ich iloczyn wektorowy a następnie długość iloczynu wektorowego.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-9 \\ 3 \\ -1+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-9-1 \\ 3 \\ -2+9-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$[-7,3,8] \times [-6,3,5] = \left[\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} \right] = [15-24,-48+35,-21+18] = [-9,-13,-3]$$

$$P = \sqrt{(-9)^2 + (-13)^2 + (-3)^2} = \sqrt{81+169+9} = \sqrt{259}$$

Uwaga: tutaj nie stosujemy wzoru

$$P' = \det(A) \cdot P$$

Gdyż stosuje się on do tzw. k-objętości czyli przykładowo:

W przestrzeni R^1 k-objętość to długość odcinka

W przestrzeni R^2 k-objętość to pole równoległoboku

W przestrzeni R^3 k-objętość to objętość równoległościanu

4. Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach: *A* = (1, 2, 3), (0, -1, 2), (0, 4, 0).

Pole trójkąta jest połową pola równoległoboku więc:

$$P_{\Delta} = \frac{\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|}{2}$$

$$\vec{AB} = [0-1, -1-2, 2-3] = [-1, -3, -1]$$
$$\vec{AC} = [0-1, 4-2, 0-3] = [-1, 2, -3]$$

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \left[\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right] = [-9-2, 1-3, -2-3] = [-11, -2, -5]$$

$$\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \sqrt{121+4+25} = \sqrt{150}$$

$$P_{\Delta} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$