Wykład 7 – zadania domowe-ODP

1. Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanego układu równań:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+3y+z=3 \\ 3x+y+2z=2 \end{cases}$$

Określamy macierz główną i liczymy kolejne wyznaczniki:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-18 \quad D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-12$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-12 \quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=6$$

$$x=\frac{D_1}{|A|}=\frac{2}{3} \quad y=\frac{D_2}{|A|}=\frac{2}{3} \quad z=\frac{D_3}{|A|}=-\frac{1}{3}$$

2. **Dla jakich wartości parametru p podany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie:**

$$\begin{cases} x + py - z = 1 \\ x + 10y - 6z = p \\ 2x - y + pz = 0 \end{cases}$$

Powyższy układ ma dokładnie jedno rozwiązanie w momencie gdy jest on układem Cramera, czyli posiada wyznacznik $\neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & p & -1 \\ 1 & 10 & -6 \\ 2 & -1 & p \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & p & -1 \\ 1 & 10 & -6 \\ 2 & -1 & p \end{vmatrix} = 10p + 1 - 12p + 20 - 6 - p^2 = -p^2 - 2p + 15$$

$$-p^2 - 2p + 15 \neq 0$$

$$\Delta = 4 + 60 = 64$$

$$\sqrt{\Delta} = 8$$

$$p_1 = \frac{2-8}{-2} = 3$$

$$p_2 = \frac{2+8}{-2} = -5$$

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow p \in R \setminus \{-5,3\}$$

3. Wyznaczyć rząd macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

I sposób:
Rząd macierzy < 3 ponieważ istnieja wiersze liniowo zależne a co za tym idzie wyznacznik jest równy 0: $wiersz_1 = wiersz_3 - wiersz_2$

Aby zbadać czy macierz jest rzędu 2-go bierzemy pod uwagę kolejne jej minory:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 6 & 15 \end{vmatrix} = 0...$$

Wszystkie minory rzędu II są zerowe ale macierz nie jest zerowa.

Tak więc z powyższych wyliczeń wynika iż macierz jest rzędu 1-go.

II sposób: rząd macierzy nie zmienia się przy operacjach liniowych na wierszach lub kolumnach, zatem wiersz1 dzielimy przez 2 a wiersz3 dzielimy przez 3 i dostajemy macierz równoważną:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Wiersz2 i wiersz3 można skreślić bo są równe wierszowi1 stąd rząd macierzy=1.

4.Wyznaczyć rząd macierzy w zależności od parametru p.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & p & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ p & -p & 1 \end{vmatrix} = 2p^2 - 3p + 2p - 3p = 2p^2 - 4p = 2p(p-2)$$

$$Rz = 3 \Leftrightarrow 2p(p-2) \neq 0 \Leftrightarrow p \neq 0 \wedge p \neq 2$$

Dla p = 2, np.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$p = 2 \Rightarrow Rz(A) = 2$$

Dla p = 0 np.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$p = 0 \Rightarrow Rz(A) = 2$$

$ODP:$

$$p \neq 0 \wedge p \neq -2 \Rightarrow Rz = 3$$

$$p = 0 \vee p = 2 \Rightarrow Rz = 2$$