

Statystyka matematyczna

w zastosowaniach

Wojciech Zieliński

STATYSTYKA: nauka poświęcona metodom badania (analizowania) zjawisk masowych; polega na systematyzowaniu obserwowanych cech ilościowych i jakościowych oraz przedstawianiu wyników w postaci zestawień tabelarycznych, wykresów, itp.; posługuje się rachunkiem prawdopodobieństwa.

STATYSTYKA MATEMATYCZNA: dział matematyki stosowanej oparty na rachunku prawdopodobieństwa; zajmuje się badaniem zbiorów na podstawie znajomości własności ich części.

Encyklopedia Popularna PWN, Warszawa 1982

| Grupa | Płeć | Punkty | Ocena | Grupa | Płeć | Punkty | Ocena |
|-------|------|--------|-------|-------|------|--------|-------|
| 1 | 1 | 0.576 | 3.0 | 2 | 0 | 0.406 | 2.0 |
| 1 | 1 | 0.537 | 3.0 | 2 | 1 | 0.365 | 2.0 |
| 1 | 0 | 0.573 | 3.0 | 2 | 0 | 0.497 | 2.0 |
| 1 | 0 | 0.772 | 4.0 | 2 | 0 | 0.372 | 2.0 |
| 1 | 0 | 0.462 | 2.0 | 2 | 0 | 0.449 | 2.0 |
| 1 | 0 | 0.348 | 2.0 | 2 | 1 | 0.678 | 3.5 |
| 1 | 1 | 0.675 | 3.5 | 2 | 1 | 0.566 | 3.0 |
| 1 | 1 | 0.613 | 3.5 | 2 | 0 | 0.617 | 3.5 |
| 1 | 0 | 0.827 | 4.5 | 2 | 1 | 0.678 | 3.5 |
| 1 | 1 | 0.650 | 3.5 | 2 | 0 | 0.595 | 3.0 |
| 1 | 1 | 0.554 | 3.0 | 2 | 1 | 0.619 | 3.5 |
| 1 | 1 | 0.551 | 3.0 | 2 | 1 | 0.619 | 3.5 |
| 1 | 1 | 0.710 | 4.0 | 2 | 1 | 0.548 | 3.0 |
| 1 | 1 | 0.562 | 3.0 | 2 | 1 | 0.397 | 2.0 |
| 1 | 1 | 0.625 | 3.5 | 2 | 1 | 0.588 | 3.0 |
| 1 | 1 | 0.646 | 3.5 | 2 | 0 | 0.469 | 2.0 |
| 1 | 1 | 0.741 | 4.0 | 2 | 1 | 0.702 | 3.5 |
| 1 | 1 | 0.650 | 3.5 | 2 | 0 | 0.679 | 3.5 |
| 1 | 0 | 0.632 | 3.5 | 2 | 1 | 0.681 | 3.5 |
| 1 | 1 | 0.584 | 3.0 | 2 | 1 | 0.499 | 2.0 |
| 1 | 1 | 0.629 | 3.5 | 2 | 1 | 0.555 | 3.0 |
| 1 | 1 | 0.617 | 3.5 | 2 | 0 | 0.620 | 3.5 |
| 1 | 0 | 0.626 | 3.5 | 2 | 1 | 0.577 | 3.0 |
| 1 | 1 | 0.711 | 4.0 | 2 | 1 | 0.696 | 3.5 |
| 1 | 1 | 0.542 | 3.0 | 2 | 0 | 0.437 | 2.0 |
| 1 | 1 | 0.653 | 3.5 | 2 | 0 | 0.625 | 3.5 |
| 1 | 0 | 0.667 | 3.5 | 2 | 0 | 0.435 | 2.0 |
| 1 | 0 | 0.387 | 2.0 | 2 | 0 | 0.584 | 3.0 |
| 1 | 0 | 0.510 | 3.0 | 2 | 1 | 0.688 | 3.5 |
| 1 | 1 | 0.600 | 3.0 | 2 | 1 | 0.431 | 2.0 |

| Grupa | Płeć | Punkty | Ocena | Grupa | Płeć | Punkty | Ocena |
|-------|------|--------|-------|-------|------|--------|-------|
| 3 | 0 | 0.485 | 2.0 | 4 | 0 | 0.774 | 4.0 |
| 3 | 0 | 0.276 | 2.0 | 4 | 0 | 0.549 | 3.0 |
| 3 | 1 | 0.595 | 3.0 | 4 | 0 | 0.638 | 3.5 |
| 3 | 1 | 0.514 | 3.0 | 4 | 1 | 0.737 | 4.0 |
| 3 | 0 | 0.308 | 2.0 | 4 | 0 | 0.610 | 3.5 |
| 3 | 0 | 0.332 | 2.0 | 4 | 1 | 0.581 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.366 | 2.0 | 4 | 1 | 0.623 | 3.5 |
| 3 | 1 | 0.547 | 3.0 | 4 | 1 | 0.583 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.591 | 3.0 | 4 | 1 | 0.658 | 3.5 |
| 3 | 0 | 0.482 | 2.0 | 4 | 1 | 0.544 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.512 | 3.0 | 4 | 1 | 0.586 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.541 | 3.0 | 4 | 0 | 0.692 | 3.5 |
| 3 | 0 | 0.574 | 3.0 | 4 | 0 | 0.632 | 3.5 |
| 3 | 1 | 0.660 | 3.5 | 4 | 1 | 0.590 | 3.0 |
| 3 | 1 | 0.435 | 2.0 | 4 | 0 | 0.525 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.533 | 3.0 | 4 | 1 | 0.699 | 3.5 |
| 3 | 1 | 0.484 | 2.0 | 4 | 0 | 0.661 | 3.5 |
| 3 | 1 | 0.448 | 2.0 | 4 | 1 | 0.551 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.469 | 2.0 | 4 | 0 | 0.535 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.444 | 2.0 | 4 | 1 | 0.603 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.460 | 2.0 | 4 | 1 | 0.524 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.641 | 3.5 | 4 | 0 | 0.516 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.362 | 2.0 | 4 | 0 | 0.561 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.393 | 2.0 | 4 | 0 | 0.630 | 3.5 |
| 3 | 0 | 0.580 | 3.0 | 4 | 0 | 0.739 | 4.0 |
| 3 | 0 | 0.453 | 2.0 | 4 | 0 | 0.641 | 3.5 |
| 3 | 1 | 0.547 | 3.0 | 4 | 0 | 0.791 | 4.0 |
| 3 | 1 | 0.513 | 3.0 | 4 | 0 | 0.768 | 4.0 |
| 3 | 1 | 0.344 | 2.0 | 4 | 0 | 0.606 | 3.0 |
| 3 | 0 | 0.403 | 2.0 | 4 | 1 | 0.732 | 4.0 |

| Grupa | Płeć | Punkty | Ocena | Grupa | Płeć | Punkty | Ocena |
|-------|------|--------|-------|-------|------|--------|-------|
| 5 | 0 | 0.723 | 4.0 | 6 | 0 | 0.813 | 4.5 |
| 5 | 0 | 0.526 | 3.0 | 6 | 1 | 0.428 | 2.0 |
| 5 | 0 | 0.585 | 3.0 | 6 | 0 | 0.588 | 3.0 |
| 5 | 1 | 0.795 | 4.0 | 6 | 0 | 0.631 | 3.5 |
| 5 | 1 | 0.600 | 3.0 | 6 | 0 | 0.642 | 3.5 |
| 5 | 0 | 0.679 | 3.5 | 6 | 1 | 0.686 | 3.5 |
| 5 | 1 | 0.616 | 3.5 | 6 | 0 | 0.695 | 3.5 |
| 5 | 0 | 0.511 | 3.0 | 6 | 0 | 0.751 | 4.0 |
| 5 | 0 | 0.603 | 3.0 | 6 | 1 | 0.685 | 3.5 |
| 5 | 1 | 0.727 | 4.0 | 6 | 0 | 0.608 | 3.0 |
| 5 | 1 | 0.734 | 4.0 | 6 | 0 | 0.464 | 2.0 |
| 5 | 1 | 0.672 | 3.5 | 6 | 0 | 0.803 | 4.0 |
| 5 | 0 | 0.525 | 3.0 | 6 | 0 | 0.747 | 4.0 |
| 5 | 1 | 0.612 | 3.5 | 6 | 0 | 0.616 | 3.5 |
| 5 | 0 | 0.730 | 4.0 | 6 | 0 | 0.611 | 3.5 |
| 5 | 1 | 0.711 | 4.0 | 6 | 1 | 0.363 | 2.0 |
| 5 | 0 | 0.789 | 4.0 | 6 | 1 | 0.635 | 3.5 |
| 5 | 0 | 0.449 | 2.0 | 6 | 0 | 0.383 | 2.0 |
| 5 | 0 | 0.464 | 2.0 | 6 | 1 | 0.659 | 3.5 |
| 5 | 0 | 0.523 | 3.0 | 6 | 0 | 0.704 | 3.5 |
| 5 | 0 | 0.627 | 3.5 | 6 | 0 | 0.654 | 3.5 |
| 5 | 0 | 0.480 | 2.0 | 6 | 0 | 0.696 | 3.5 |
| 5 | 1 | 0.649 | 3.5 | 6 | 1 | 0.652 | 3.5 |
| 5 | 1 | 0.615 | 3.5 | 6 | 1 | 0.824 | 4.5 |
| 5 | 0 | 0.430 | 2.0 | 6 | 1 | 0.767 | 4.0 |
| 5 | 1 | 0.625 | 3.5 | 6 | 1 | 0.604 | 3.0 |
| 5 | 1 | 0.530 | 3.0 | 6 | 0 | 0.609 | 3.0 |
| 5 | 0 | 0.507 | 2.0 | 6 | 0 | 0.760 | 4.0 |
| 5 | 0 | 0.472 | 2.0 | 6 | 1 | 0.799 | 4.0 |
| 5 | 0 | 0.691 | 3.5 | 6 | 0 | 0.691 | 3.5 |

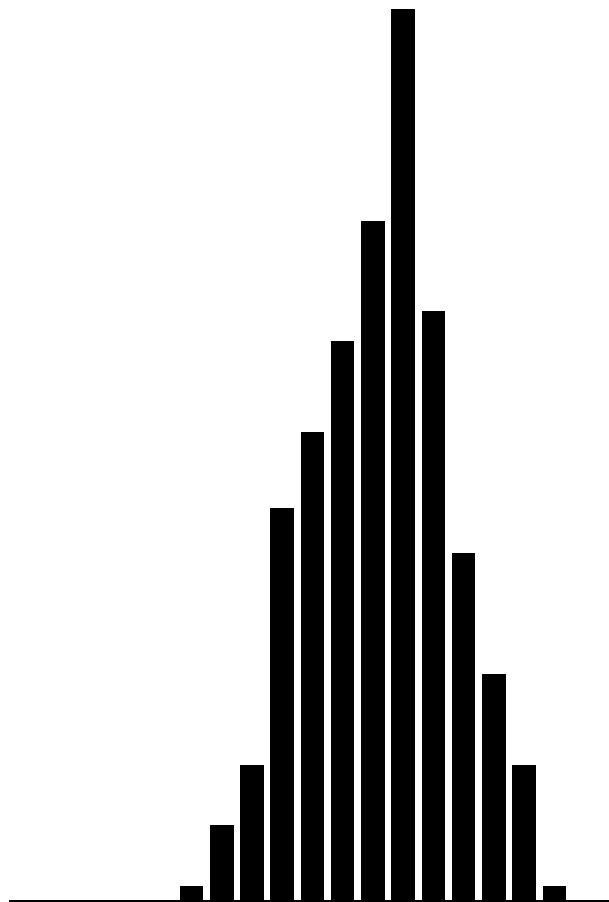
| Grupa | Płeć | Punkty | Ocena | Grupa | Płeć | Punkty | Ocena |
|-------|------|--------|-------|-------|------|--------|-------|
| 7 | 0 | 0.334 | 2.0 | 8 | 0 | 0.605 | 3.0 |
| 7 | 0 | 0.496 | 2.0 | 8 | 0 | 0.588 | 3.0 |
| 7 | 0 | 0.750 | 4.0 | 8 | 0 | 0.715 | 4.0 |
| 7 | 1 | 0.500 | 2.0 | 8 | 1 | 0.696 | 3.5 |
| 7 | 1 | 0.520 | 3.0 | 8 | 1 | 0.848 | 4.5 |
| 7 | 0 | 0.640 | 3.5 | 8 | 0 | 0.688 | 3.5 |
| 7 | 0 | 0.567 | 3.0 | 8 | 0 | 0.537 | 3.0 |
| 7 | 1 | 0.433 | 2.0 | 8 | 1 | 0.472 | 2.0 |
| 7 | 1 | 0.550 | 3.0 | 8 | 1 | 0.523 | 3.0 |
| 7 | 0 | 0.469 | 2.0 | 8 | 1 | 0.546 | 3.0 |
| 7 | 1 | 0.608 | 3.0 | 8 | 0 | 0.617 | 3.5 |
| 7 | 1 | 0.583 | 3.0 | 8 | 0 | 0.687 | 3.5 |
| 7 | 1 | 0.494 | 2.0 | 8 | 1 | 0.682 | 3.5 |
| 7 | 1 | 0.836 | 4.5 | 8 | 1 | 0.753 | 4.0 |
| 7 | 1 | 0.422 | 2.0 | 8 | 0 | 0.705 | 3.5 |
| 7 | 0 | 0.599 | 3.0 | 8 | 0 | 0.775 | 4.0 |
| 7 | 0 | 0.487 | 2.0 | 8 | 1 | 0.719 | 4.0 |
| 7 | 0 | 0.563 | 3.0 | 8 | 0 | 0.658 | 3.5 |
| 7 | 0 | 0.648 | 3.5 | 8 | 1 | 0.477 | 2.0 |
| 7 | 0 | 0.559 | 3.0 | 8 | 1 | 0.754 | 4.0 |
| 7 | 0 | 0.628 | 3.5 | 8 | 0 | 0.555 | 3.0 |
| 7 | 0 | 0.672 | 3.5 | 8 | 0 | 0.540 | 3.0 |
| 7 | 1 | 0.499 | 2.0 | 8 | 1 | 0.638 | 3.5 |
| 7 | 1 | 0.612 | 3.5 | 8 | 1 | 0.794 | 4.0 |
| 7 | 0 | 0.533 | 3.0 | 8 | 0 | 0.515 | 3.0 |
| 7 | 0 | 0.645 | 3.5 | 8 | 0 | 0.579 | 3.0 |
| 7 | 0 | 0.419 | 2.0 | 8 | 0 | 0.763 | 4.0 |
| 7 | 1 | 0.496 | 2.0 | 8 | 0 | 0.555 | 3.0 |
| 7 | 0 | 0.556 | 3.0 | 8 | 0 | 0.661 | 3.5 |
| 7 | 0 | 0.404 | 2.0 | 8 | 0 | 0.489 | 2.0 |

| Grupa | Płeć | Punkty | Ocena | Grupa | Płeć | Punkty | Ocena |
|-------|------|--------|-------|-------|------|--------|-------|
| 9 | 1 | 0.725 | 4.0 | 10 | 1 | 0.431 | 2.0 |
| 9 | 1 | 0.629 | 3.5 | 10 | 0 | 0.503 | 2.0 |
| 9 | 0 | 0.853 | 4.5 | 10 | 0 | 0.474 | 2.0 |
| 9 | 0 | 0.577 | 3.0 | 10 | 0 | 0.615 | 3.5 |
| 9 | 1 | 0.441 | 2.0 | 10 | 1 | 0.466 | 2.0 |
| 9 | 0 | 0.478 | 2.0 | 10 | 0 | 0.428 | 2.0 |
| 9 | 1 | 0.804 | 4.0 | 10 | 1 | 0.588 | 3.0 |
| 9 | 1 | 0.687 | 3.5 | 10 | 1 | 0.603 | 3.0 |
| 9 | 1 | 0.438 | 2.0 | 10 | 1 | 0.622 | 3.5 |
| 9 | 1 | 0.573 | 3.0 | 10 | 0 | 0.494 | 2.0 |
| 9 | 0 | 0.620 | 3.5 | 10 | 1 | 0.474 | 2.0 |
| 9 | 0 | 0.801 | 4.0 | 10 | 0 | 0.506 | 2.0 |
| 9 | 1 | 0.670 | 3.5 | 10 | 1 | 0.508 | 2.0 |
| 9 | 1 | 0.704 | 3.5 | 10 | 1 | 0.673 | 3.5 |
| 9 | 0 | 0.694 | 3.5 | 10 | 1 | 0.582 | 3.0 |
| 9 | 1 | 0.443 | 2.0 | 10 | 0 | 0.544 | 3.0 |
| 9 | 0 | 0.614 | 3.5 | 10 | 0 | 0.643 | 3.5 |
| 9 | 1 | 0.614 | 3.5 | 10 | 0 | 0.559 | 3.0 |
| 9 | 0 | 0.554 | 3.0 | 10 | 0 | 0.592 | 3.0 |
| 9 | 0 | 0.642 | 3.5 | 10 | 0 | 0.545 | 3.0 |
| 9 | 0 | 0.677 | 3.5 | 10 | 1 | 0.561 | 3.0 |
| 9 | 1 | 0.401 | 2.0 | 10 | 1 | 0.449 | 2.0 |
| 9 | 0 | 0.521 | 3.0 | 10 | 1 | 0.450 | 2.0 |
| 9 | 0 | 0.633 | 3.5 | 10 | 0 | 0.695 | 3.5 |
| 9 | 1 | 0.428 | 2.0 | 10 | 0 | 0.457 | 2.0 |
| 9 | 1 | 0.850 | 4.5 | 10 | 0 | 0.614 | 3.5 |
| 9 | 1 | 0.720 | 4.0 | 10 | 1 | 0.558 | 3.0 |
| 9 | 0 | 0.443 | 2.0 | 10 | 1 | 0.677 | 3.5 |
| 9 | 0 | 0.713 | 4.0 | 10 | 1 | 0.734 | 4.0 |
| 9 | 0 | 0.601 | 3.0 | 10 | 1 | 0.476 | 2.0 |

Punkty z klasówki

| | |
|-------|----|
| 0.00: | 0 |
| 0.05: | 0 |
| 0.10: | 0 |
| 0.15: | 0 |
| 0.20: | 0 |
| 0.25: | 0 |
| 0.30: | 1 |
| 0.35: | 5 |
| 0.40: | 9 |
| 0.45: | 26 |
| 0.50: | 31 |
| 0.55: | 37 |
| 0.60: | 45 |
| 0.65: | 59 |
| 0.70: | 39 |
| 0.75: | 23 |
| 0.80: | 15 |
| 0.85: | 9 |
| 0.90: | 1 |
| 0.95: | 0 |
| 1.00: | 0 |

| | |
|---------------|-------|
| Średnia | 0.589 |
| Kwartył dolny | 0.508 |
| Mediana | 0.595 |
| Kwartył górny | 0.672 |



Stopnie z klasówki

2.0: 76

3.0: 88

3.5: 92

4.0: 37

4.5: 7

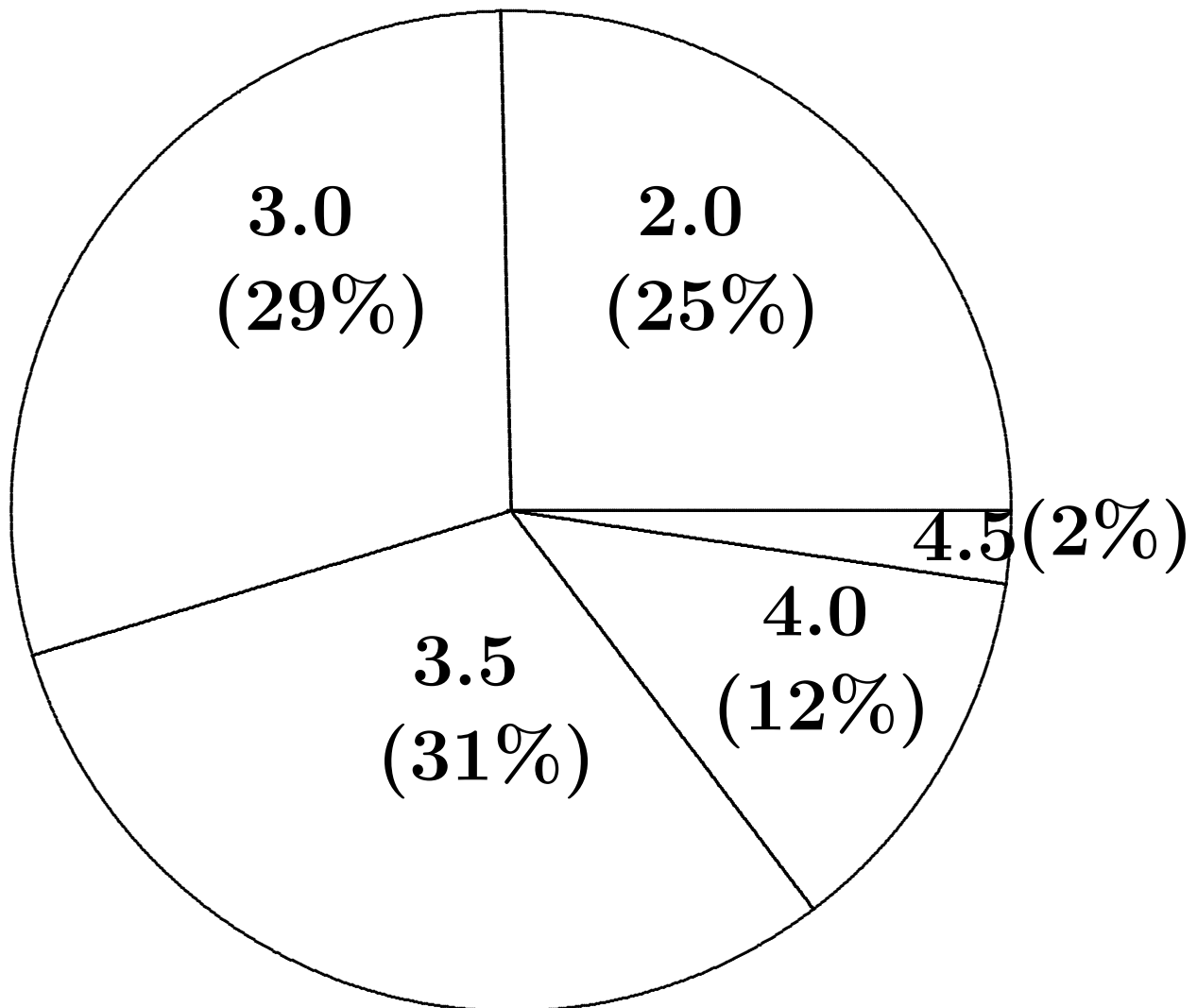
5.0: 0

Średnia 3.06

Kwartył dolny 2.00

Mediana 3.00

Kwartył górny 3.50

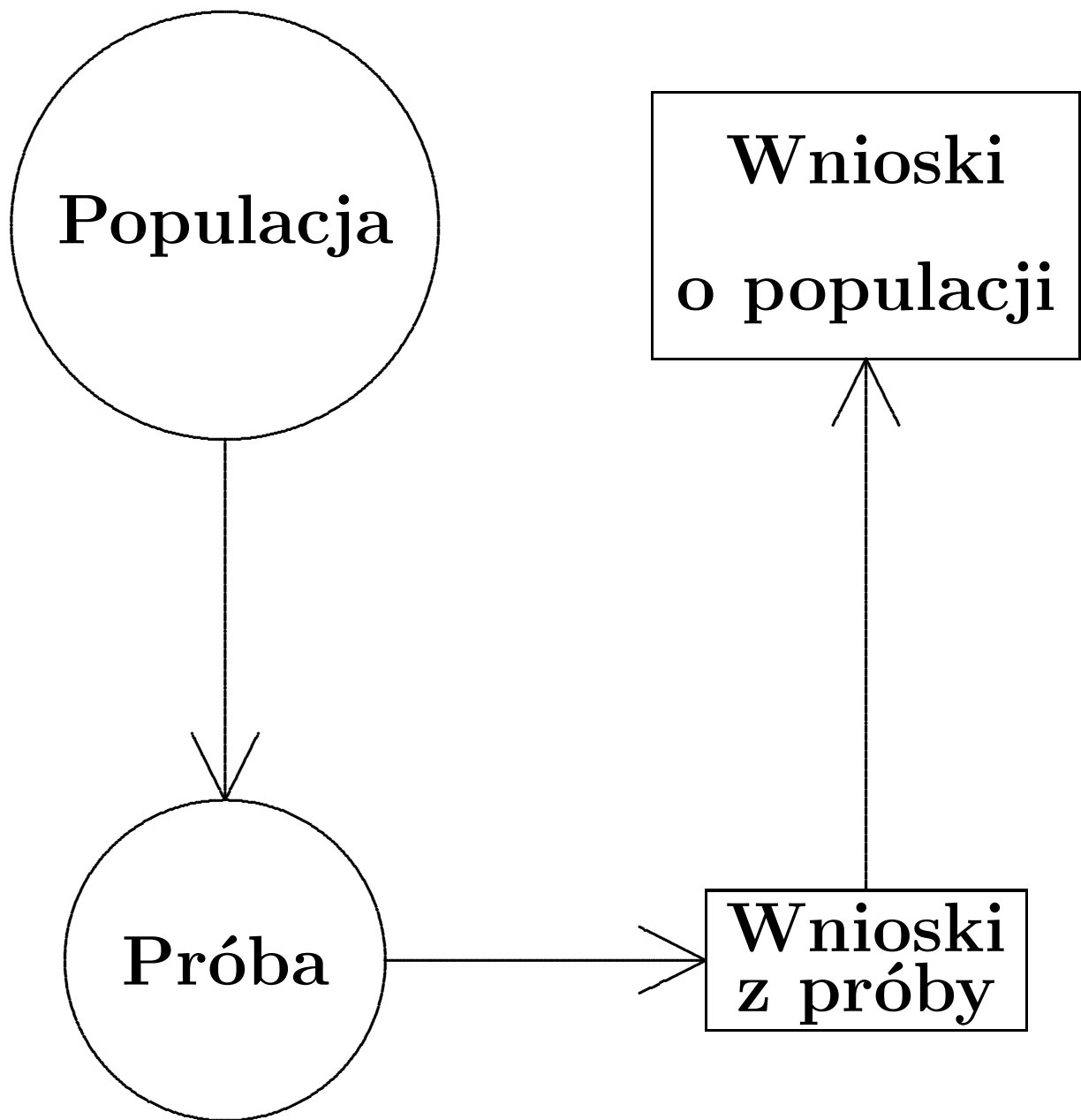


Oceny z klasówki

| | Negatywne | Pozytywne | Razem |
|-----------|-----------|-----------|-------|
| Ogółem | 76 (25%) | 224 (75%) | 300 |
| Kobiety | 46 (28%) | 116 (72%) | 162 |
| Mężczyźni | 30 (22%) | 108 (78%) | 138 |
| Grupa 1 | 3 (10%) | 27 (90%) | 30 |
| Grupa 2 | 11 (37%) | 19 (63%) | 30 |
| Grupa 3 | 17 (57%) | 13 (43%) | 30 |
| Grupa 4 | 0 (0%) | 30 (100%) | 30 |
| Grupa 5 | 6 (20%) | 24 (80%) | 30 |
| Grupa 6 | 4 (13%) | 26 (87%) | 30 |
| Grupa 7 | 12 (40%) | 18 (60%) | 30 |
| Grupa 8 | 3 (10%) | 27 (90%) | 30 |
| Grupa 9 | 7 (23%) | 23 (77%) | 30 |
| Grupa 10 | 13 (43%) | 17 (57%) | 30 |

Pytania

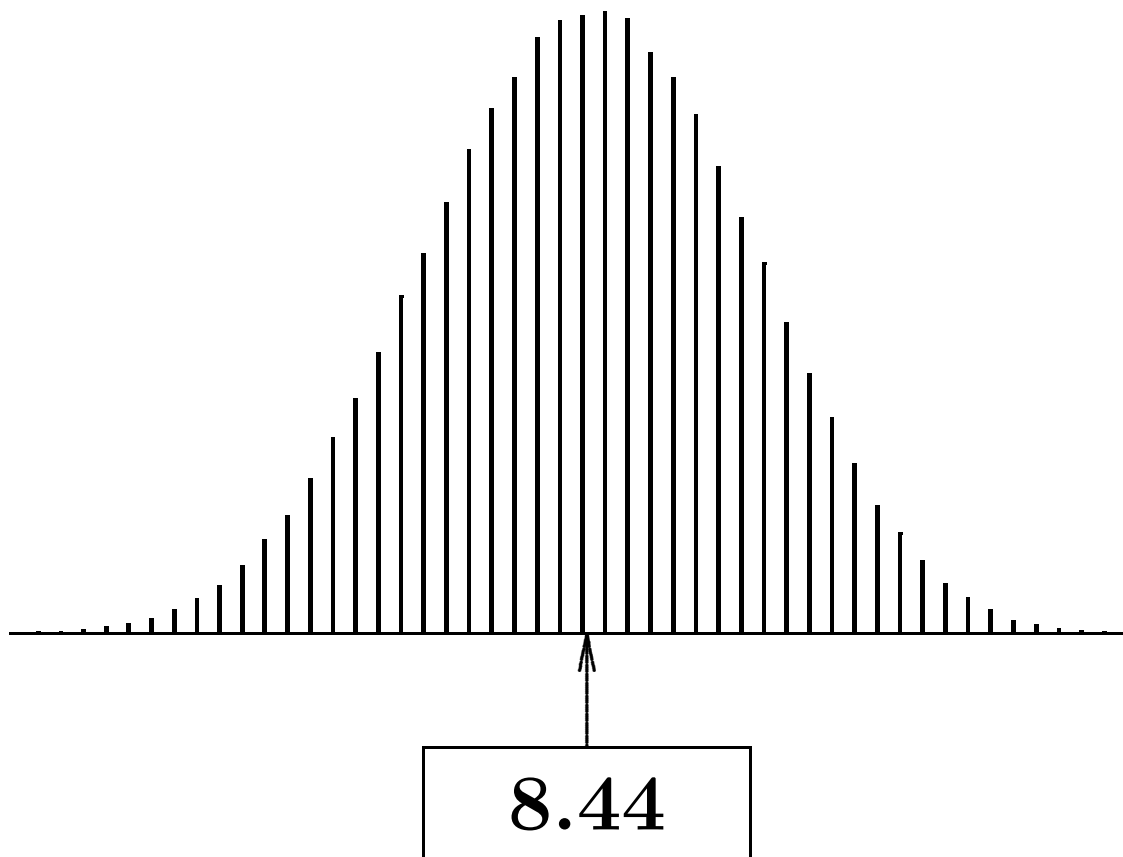
1. Na ile „dokładne” są podane wyniki?
2. Na ile wyniki odzwierciedlają stan wiedzy?
3. Jakich wyników można oczekiwać na następnej klasówce?
4. Jakich wyników można oczekiwać na egzaminie?



| | | | | |
|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| F 5 27 | F 2 29 | F 4 12 | F 1 8 | F 5 33 |
| M 8 40 | M 8 52 | M 6 33 | F 6 38 | F 8 22 |
| M 9 35 | M 10 73 | F 7 30 | M 11 50 | M 9 67 |
| M 14 68 | M 12 75 | F 8 40 | M 14 64 | M 11 69 |
| F 9 54 | F 8 40 | M 11 51 | M 10 55 | M 15 66 |

Próba 1: 5 2 4 1 5 Średnia z próby: 3.40
 Próba 2: 8 8 6 6 8 Średnia z próby: 7.20
 Próba 3: 9 10 7 11 9 Średnia z próby: 9.20
 Próba 4: 14 12 8 14 11 Średnia z próby: 11.80
 Próba 5: 9 8 11 10 15 Średnia z próby: 10.60

Średnia populacji: 8.44



Pytania

Czy mając do dyspozycji tylko jedną próbę można ocenić na ile dobrze średnia z tej próby przybliży prawdziwą średnią?

Co zrobić, by być „pewniejszym” wyniku?

Populacja

Zbiór obiektów z wyróżnioną cechą (cechami)

Próba

Wybrana część populacji podlegająca badaniu

Cecha

Wielkość losowa charakteryzująca obiekty danej populacji

Cecha jakościowa

Cecha przyjmująca wartości nie będące liczbami (np. *kolor, płeć, smakowitość*)

Cecha (ilościowa) skokowa

Cecha przyjmująca pewne wartości liczbowe i nie przyjmująca wartości pośrednich (np. *ilość bakterii, ilość pracowników, ilość pasażerów*). Cechy te nazywane są również **dyskretnymi**.

Cecha (ilościowa) ciągła

Cecha przyjmująca wartości z pewnego przedziału liczbowego (np. *wzrost, waga, plon*)

Jakość wnioskowania statystycznego

Oceniamy parametr θ cechy na podstawie próby X_1, X_2, \dots, X_n . Niech $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie „jakąś” oceną parametru θ

Nieobciążoność

Jeżeli średnia wartość oceny $\hat{\theta}$ jest równa wartości parametru θ , to ocenę $\hat{\theta}$ nazywamy nieobciążoną

Minimalna wariancja

Z dwóch różnych nieobciążonych ocen $\hat{\theta}$ oraz $\hat{\hat{\theta}}$ tego samego parametru θ za lepszą uznajemy tę, która „średnio” przyjmuje wartości bliższe parametrowi θ

Minimalny błąd średniokwadratowy

Jeżeli ocena $\hat{\theta}$ nie jest nieobciążona, to wówczas jako miernik jakości stosuje się błąd średniokwadratowy. Jest to „uśrednienie” obciążenia oraz wariancji