

TEST I

Imię i nazwisko:

Numer indeksu:

Numer grupy:

Test jest testem wielokrotnego wyboru (tzn. wszystkie kombinacje odpowiedzi są możliwe). Pytanie jest uznane za poprawnie rozwiązane wttw, gdy wszystkie podpunkty w pytaniu mają zaznaczone właściwe odpowiedzi. Odpowiedzi “+” oraz “-” proszę zaznaczać przy każdym podpunkcie pytania w stosownym miejscu - wewnątrz nawiasu kwadratowego poprzedzającego treść []. Życzę powodzenia.

1. Niech $A_t = \{x \in \mathbb{N} : t|x\}$, wtedy:

(a) [+] jeżeli $T = \{2, 3, 5\}$, to $\bigcap_{t \in T} A_t = \{x \in \mathbb{N} : (2 \cdot 3 \cdot 5) | x\}$

(b) [-] jeżeli $T = \{2, 3, 5\}$, to $\bigcup_{t \in T} A_t = \{x \in \mathbb{N} : (2 \cdot 3 \cdot 5) | x\}$

(c) [+] jeżeli $T = \{2, 3\}$, to $\bigcap_{t \in T} A_t \setminus \bigcup_{t \in T} A_t = \emptyset$

2. Niech $A = \emptyset$, $B = \{\emptyset\}$ oraz $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 1, 2\}$, stąd:

(a) [-] $|A \cap B| = 1$

(b) [+] $|B \cap C| = 1$

(c) [-] $|(C \setminus B) \setminus A| = |(C \cup B) \cup A|$

3. Niech $A = \{1, 2, 3\}$ oraz $B = \{x : x \text{ jest liczbą pierwszą}\}$, wtedy:

(a) [-] $A \times B = B \times A$

(b) [+] $|A \times B| = |B \times A|$

(c) [+] $(\{2, 3\} \times \{2, 3\}) \subset A \times B$

4. Niech A , B oraz C będą zbiorami niepustymi, wtedy:

(a) [+] $A \oplus B \oplus C \subset A \cup B \cup C$

(b) [-] $(A \cap B) \subset C' \cup (A \cap B)$

(c) [-] $C' \setminus (A \cup B) = \emptyset$

5. Niech $U = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ będzie uniwersum relacji r , wtedy:

(a) [+] jeżeli $r = \emptyset$, to r jest relacją antysymetryczną, przechodnią

(b) [+] jeżeli $r = \{(a, b) \in U : (a + b) \bmod 2 = 1\}$, to r jest relacją zwrotną lub symetryczną

(c) [+] jeżeli $r = \{(a, b) \in U : a = 1 \wedge b > a\}$, to r jest relacją przeciwzwrotną lub spójną

6. Dla dowolnych relacji r_1 oraz r_2 zdefiniowanych nad niepustym uniwersum zachodzi:

(a) [-] jeżeli r_1, r_2 są relacjami symetrycznymi, to relacja $r_1 \oplus r_2$ jest zwrotna

(b) [+] jeżeli r_1, r_2 są relacjami zwrotnymi, to relacja $r_1 \setminus r_2$ jest przeciwzwrotna

(c) [+] jeżeli obie relacje są relacjami pełnymi, to $|r_1 \oplus r_2| < |r_1 \cup r_2|$

7. Niech r i s będą relacjami takimi, że $r = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$ oraz $s = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$, wtedy:

(a) [+] $r \circ s = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

(b) [-] $s \circ r = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

(c) [+] $r \circ s \neq s \circ r$

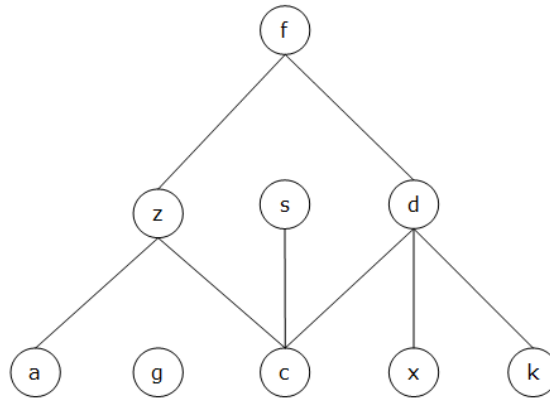
8. Niech r_1 oraz r_2 będą dowolnymi relacjami równoważności nad niepustym uniwersum, wtedy:

- (a) [+] relacja $r_1 \oplus r_2$ nie jest relacją równoważności
- (b) [-] relacja $r_1 \cup r_2$ nie jest relacją równoważności
- (c) [+] jeżeli $r_1 \cap r_2 = \emptyset$, to $r_1 \setminus r_2$ jest relacją równoważności

9. Istnieją skończony niepusty zbiór X oraz relacja równoważności r nad zbiorem X takie, że:

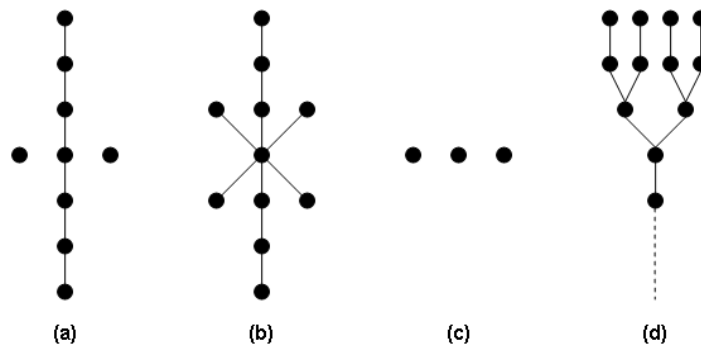
- (a) [-] relacja r dzieli zbiór X na dwie klasy abstrakcji A oraz B takie, że $A \cap B \neq \emptyset$,
- (b) [+] relacja r dzieli zbiór X na $\lfloor \sqrt{|X|} \rfloor$ klas abstrakcji
- (c) [+] relacja r oraz r^{-1} generują identyczne podziały zbioru X

10. Rozważmy zbiór $X = \{a, c, d, f, g, k, s, x, z\}$ uporządkowany relacją r zgodnie z poniższym diagramem Hassego, wtedy:



- (a) [+] ograniczeniem dolnym zbioru $\{z, s, d\}$ względem relacji r jest element c
- (b) [-] ograniczeniem górnym zbioru $\{c, x, k\}$ względem relacji r jest element d albo f
- (c) [+] $\sup \{s, d\} = f$ lub $\inf \{s, d\} = c$

11. Rozważ zbiory uporządkowane pewnymi relacjami zgodnie z diagramami Hassego przedstawionymi na poniższym rysunku. Które ze zdań jest prawdziwe:



- (a) [-] w zbiorze (a) istnieje element największy
- (b) [-] w zbiorze (b) nie istnieje element maksymalny
- (c) [-] w zbiorze (c) lub (d) można wyróżnić element najmniejszy

12. Relacja $\{(a, a), (a, b), (a, c), (b, b), (b, c), (c, c)\}$ jest w zbiorze $\{a, b, c\}$ relacją porządku:

- (a) [+] częściowego
 (b) [+] liniowego
 (c) [+] dobrego
13. Porządkiem liniowym w zbiorze $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots\}$ wielokątów wypukłych na płaszczyźnie euklidesowej jest relacja r taka, że:
- (a) [-] $(w_i, w_j) \in r$ wttw wielokąt w_i zawiera się w wielokącie w_j
 (b) [-] $(w_i, w_j) \in r$ wttw pole powierzchni wielokąta w_i jest nie większe niż pole wielokąta w_j
 (c) [-] $(w_i, w_j) \in r$ wttw wielokąt w_i ma tyle samo wierzchołków co wielokąt w_j
14. Niech $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, będzie funkcją, wtedy:
- (a) [-] jeżeli $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$, to funkcja f nie jest suriekcją ale jest injekcją
 (b) [+] jeżeli $f(x) = \frac{1}{x}$, to funkcja f jest injekcją lub suriekcją
 (c) [+] jeżeli $f(x) = \frac{1}{x}$, to funkcja f nie jest bijekcją
15. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$, wtedy:
- (a) [-] dla $A = [-1, 1]$ zachodzi $f(A) = (0, \infty)$
 (b) [+] dla $B = (1, 2)$ zachodzi $f^{-1}(B) = (-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$
 (c) [-] dla $C = \{\frac{1}{2}, 1\}$ zachodzi $f(C) \cap f^{-1}(C) = \emptyset$
16. Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, jeżeli:
- (a) [-] $f(x) = ||x| - 2|$, to $f^{-1}(x) = \left|\frac{1}{2}|x| - 1\right|$
 (b) [-] $f(x) = x^5 + 5$, to $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 5}$
 (c) [+] $f(x) = f^{-1}(x)$, to $f(x) = x$
17. Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ będzie funkcją postaci $f(n) = \sqrt{n^3} \lg n! + n^2$. Które z podanych poniżej ograniczeń funkcji jest poprawne:
- (a) [-] $f(n) = \Theta(n^2)$
 (b) [+] $f(n) = \Omega\left(n^{\frac{5}{2}}\right)$
 (c) [+] $f(n) = O\left(n^{\sqrt{n}}\right)$
18. Niech $f(n) = n^3 + n \lg n + \sqrt{n}$ oraz $g(n) = 2^{2 \lg n} + n^2$, wtedy:
- (a) [+] $f(n) + g(n) = \Omega(n)$
 (b) [-] $f(n) + g(n) = O(n^2)$
 (c) [-] $f(n) \cdot g(n) = \Theta(n^4)$
19. Które z poniższych stwierdzeń jest tautologią rachunku zdań:
- (a) [+] $(p \wedge \neg p) \vee (q \oplus \neg q)$
 (b) [+] $\neg(p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg p \vee q$
 (c) [-] $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \rightarrow p)$
20. Które z poniższych zdań jest prawdziwe:
- (a) [-] $\exists (m \in \mathbb{Z}) \forall (n \in \mathbb{Z}) (m + n - 3 = 157)$
 (b) [+] $\forall (x \in \mathbb{Q}) \exists (y \in \mathbb{Q}) ((x^2 + 43)y = 3)$
 (c) [-] $\forall (p \in \mathbb{R}) \neg \exists (q \in \mathbb{R}) ((|p| + 43)y = 0)$