Zadania z Matematyki Dyskretnej – Moce zbiorów

1. Dowieść, że następujące zbiory A i B są równoliczne:
   $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x^2 < 100\}$

2. Jaką moc mają następujące zbiory?

   (a) $\{x \in \mathbb{N} : 10|x\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{N} : \exists_{y\in\mathbb{R}} x = \sin y\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{N} : \exists_{y\in\mathbb{N}} x = \ln y\}$

   (d) $\{x \in \mathbb{N} : \exists_{y\in\mathbb{R}} x = \mathrm{tg}\ y\}$

3. Dowieść, że dla dowolnych zbiorów A_1, A_2, B_1 i B_2: jeśli $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$, to $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$.

4. Dowieść, że jeśli zbiory A i B są przeliczalne, to $A \cup B$ też jest zbiorem przeliczalnym. Wywnioskować stąd, że zbiór liczb całkowitych jest zbiorem przeliczalnym.

5. Dowieść, że jeśli zbiory A i B są przeliczalne, to $A \times B$ też jest zbiorem przeliczalnym. Wywnioskować stąd, że zbiór liczb wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.

6. Dowieść, że dla każdego n zbiór wielomianów stopnia $\leq n$ o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny.

7. Dowieść, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest rodziną zbiorów przeliczalnych, to $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ też jest zbiorem przeliczalnym. Wywnioskować stąd, że zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych jest zbiorem przeliczalnym.

8. Dowieść, że $A \sim B$, jeśli:

   (a) A,B - dowolne dwa odcinki otwarte.

   (b) A - odcinek otwarty,B - odcinek jednostronnie domknięty.

   (c) A,B - dowolne dwa okręgi.

   (d) A,B - dowolne dwa koła.

   (e) A - prosta,B - odcinek otwarty.

   (f) A - prosta,B - odcinek domknięty.

(g) A - prosta,B - półprosta domknięta.

9. Sprawdzić, czy następujące zbiory mają moc $\mathfrak{c}$:

   (a) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{n \in \mathbb{N}} x^n \in \mathbb{Q}\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{R} : \exists_{y \in \mathbb{R}} x = 2y\}$

   (c) $\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x = y\}$

   (d) $\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 = 1\}$

   (e) $\{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge x - y = 3\}$

10. Dowieść, że zbiór wszystkich zerojedynkowych ciągów skończonych jest zbiorem mocy $\aleph_0$.

11. Dowieść, że zbiór wszystkich zerojedynkowych ciągów nieskończonych (czyli zbiór wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$) jest zbiorem mocy $\mathfrak{c}$.